Devoir surveillé de mathématiques Enseignement obligatoire

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 — 5 points

Partie A. — Cette partie est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.

1. Ce matin, le gérant d'une entreprise attend une lettre importante. Il a observé que le facteur passe chaque matin entre 10h et 10h30. On note X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée du facteur, exprimée en minutes après 10h et on suppose que X suit la loi uniforme sur $[0\,;30]$. Sachant que le facteur n'est toujours pas passé à 10h15, la probabilité qu'il passe après 10h25 est égale à :

A) $\dfrac{1}{5}$ B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{1}{3}$

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif. On sait que $P(X \leqslant 30) = 0{,}2$. La valeur de λ, arrondie à 10^{-3} près, est égale à :

D) $0,003$ E) 0,054 F) 0,007

3. Dans un club sportif, 40% des hommes et $\dfrac{1}{5}$ des femmes pratiquent le tennis. On sait également que 31% des membres de ce club pratiquent le tennis. On interroge au hasard un membre de ce club. On note F l'évènement : « la personne interrogée est une femme » et T l'évènement « la personne interrogée pratique le tennis ». La probabilité de F est égale à

G) 0,55 H) 0,45 I) 0,062.

4. Un mobile se déplace selon un mouvement rectiligne. Sa vitesse instantanée, à un instant $t \geqslant 0$ exprimé en secondes, est $v(t) = 1{,}5t + 2$, en $m.s^{-1}$. La vitesse moyenne du mobile sur $[0\,;10]$ est égale à :

J) 9,5 m.s^{-1} K) 95 m.s^{-1} L) 1,5 m.s^{-1}

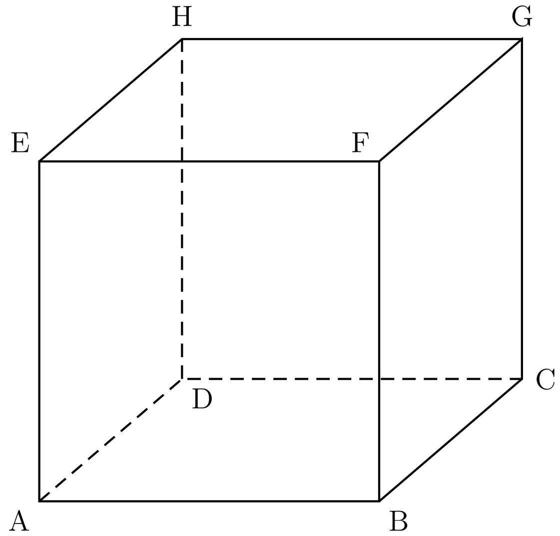
Partie B. — Dire si l'affirmation suivante est VRAIE ou FAUSSE en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

AFFIRMATION : la limite de la fonction $x \mapsto \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1}$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.

Exercice 2 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.

Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ et $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$.



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

   En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

2. On considère l'algorithme ci-contre.

   a. Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus. On détaillera sur sa copie toutes les étapes de l'algorithme.

   b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ?

   Que peut-on en déduire pour le triangle MNP ?

   c. Comment doit-on modifier cet algorithme à partir de la ligne L9 afin qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M ?

L1 : Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
L2 : d prend la valeur $x_N - x_M$
L3 : e prend la valeur $y_N - y_M$
L4 : f prend la valeur $z_N - z_M$
L5 : g prend la valeur $x_P - x_M$
L6 : h prend la valeur $y_P - y_M$
L7 : i prend la valeur $z_P - z_M$
L8 : k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
L9 : Afficher k

3. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(5\,;-8\,;4)$.

   a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (MNP)

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

   c. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.

   Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

   a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$.

   b. On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.

   Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

Exercice 3 **5 points**

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ de l'annexe (page 5).
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. Vérifier que $1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a. Interpréter géométriquement d_n.

b. Calculer d_0.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis, que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_n.

c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe (page 5) à rendre avec la copie.

d. Justifier cette construction.

Exercice 4 **5 points**

Partie A. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

Sur l'annexe (page 5), on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = 5$.

On désigne par A le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées et on note B le point de coordonnées $(0\,;5)$.

1. Déterminer les coordonnées de A.

2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B. — On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{5}{3}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-3a}}\right)$.

4. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$$

a. Hachurer la partie $\mathcal{D}$ sur la figure de l'annexe (page 5).

b. Démontrer que l'aire, en unité d'aire, de $\mathcal{D}$ est $\dfrac{5}{3}\ln 2$.

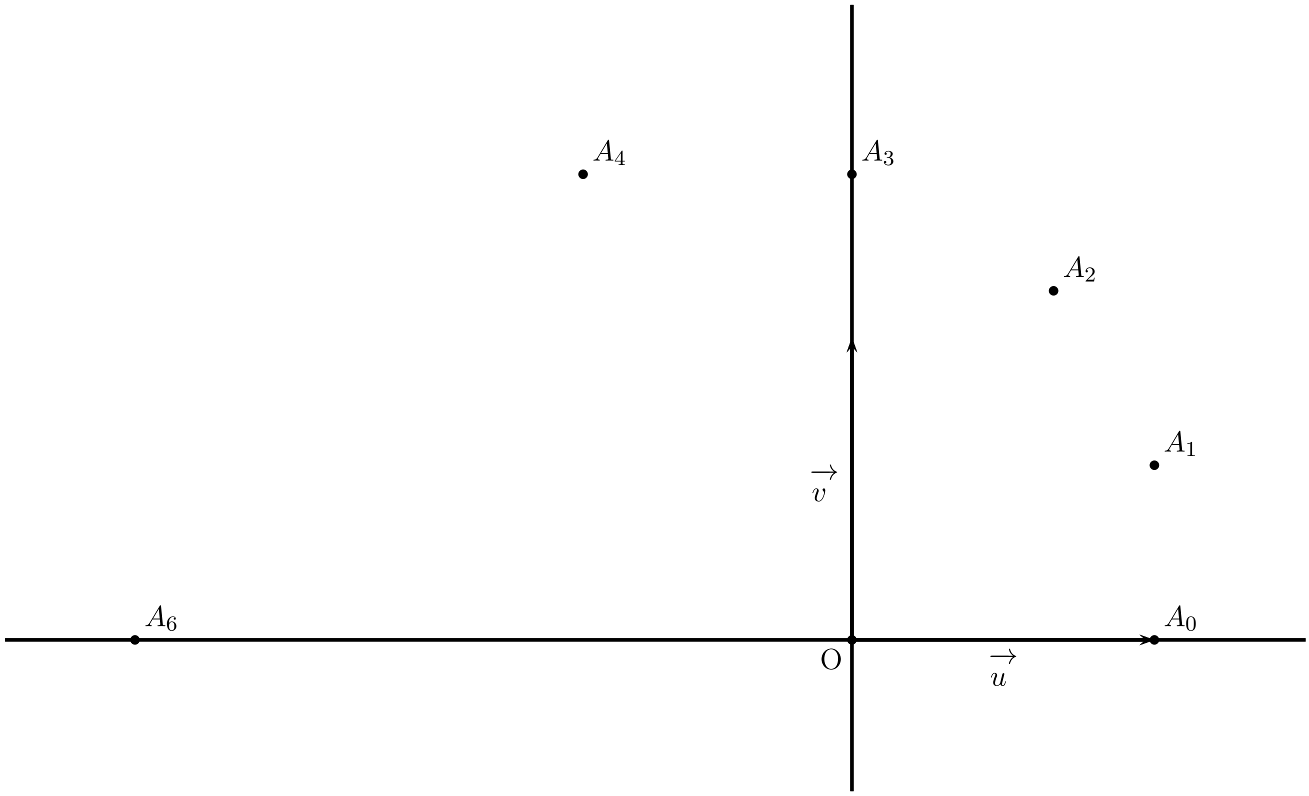
Partie C. — On désigne par N un point quelconque de la droite Δ d'abscisse $x_N > 0$.

Peut-on choisir le point N de telle sorte que la droite $(\mathrm{A}N)$ sépare $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire ?

NOM : .... **Prénom :** ....

ANNEXE
À rendre avec sa copie

Exercice 3



Exercice 4