Devoir surveillé de mathématiques
Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 — 5 points

Partie A. — Cette partie est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.

1. Ce matin, le gérant d'une entreprise attend une lettre importante. Il a observé que le facteur passe chaque matin entre 10h et 10h30. On note X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée du facteur, exprimée en minutes après 10h et on suppose que X suit la loi uniforme sur $[0\,;30]$. Sachant que le facteur n'est toujours pas passé à 10h15, la probabilité qu'il passe après 10h25 est égale à :

A) $\dfrac{1}{5}$ B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{1}{3}$

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif. On sait que $P(X \leqslant 30) = 0{,}2$. La valeur de λ, arrondie à 10^{-3} près, est égale à :

D) $0,003$ E) 0,054 F) 0,007

3. Dans un club sportif, 40% des hommes et $\dfrac{1}{5}$ des femmes pratiquent le tennis. On sait également que 31% des membres de ce club pratiquent le tennis. On interroge au hasard un membre de ce club. On note F l'évènement : « la personne interrogée est une femme » et T l'évènement « la personne interrogée pratique le tennis ». La probabilité de F est égale à

G) 0,55 H) 0,45 I) 0,062.

4. Un mobile se déplace selon un mouvement rectiligne. Sa vitesse instantanée, à un instant $t \geqslant 0$ exprimé en secondes, est $v(t) = 1{,}5t + 2$, en $m.s^{-1}$. La vitesse moyenne du mobile sur $[0\,;10]$ est égale à :

J) 9,5 m.s^{-1} K) 95 m.s^{-1} L) 1,5 m.s^{-1}

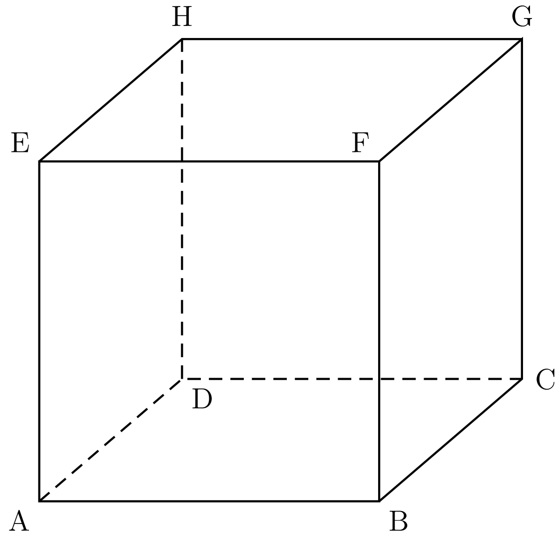
Partie B. — Dire si l'affirmation suivante est VRAIE ou FAUSSE en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

AFFIRMATION : la limite de la fonction $x \mapsto \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1}$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.

Exercice 2 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.

Dans le repère $\left(A~;~\overrightarrow{AB},~\overrightarrow{AD},~\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ et $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$.



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

   En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

2. On considère l'algorithme ci-contre.

   a. Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus. On détaillera sur sa copie toutes les étapes de l'algorithme.

   b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ?

   Que peut-on en déduire pour le triangle MNP ?

   c. Comment doit-on modifier cet algorithme à partir de la ligne L9 afin qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M ?

L1 : Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
L2 : d prend la valeur $x_N - x_M$
L3 : e prend la valeur $y_N - y_M$
L4 : f prend la valeur $z_N - z_M$
L5 : g prend la valeur $x_P - x_M$
L6 : h prend la valeur $y_P - y_M$
L7 : i prend la valeur $z_P - z_M$
L8 : k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
L9 : Afficher k

3. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(5\,;-8\,;4)$.

   a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (MNP)

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

   c. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

   a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$.

   b. On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
   Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

Exercice 3 **5 points**

À TRAITER SUR UNE FEUILLE SÉPARÉE

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que $N = 1 + 2 + \cdots + n$.

Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A. — Nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. **a.** Montrer que le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

   b. En déduire que le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B. — Étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne

$$x^2 - 8y^2 = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).
2. Démontrer que si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C. — Lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer la matrice A^{-1} puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3. Démontrer que $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\,;y')$ est solution de (E).
4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.

   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E).

Partie D. — Retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2 016 qui est le carré d'un entier.

Exercice 4 **5 points**

Partie A. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}.$$

Sur l'annexe (page 5), on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = 5$.

On désigne par A le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées et on note B le point de coordonnées $(0\,;5)$.

1. Déterminer les coordonnées de A.

2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B. — On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{5}{3}\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-3x}\right)$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\ln\left(\frac{2}{1 + \mathrm{e}^{-3a}}\right)$.

4. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$$

a. Hachurer la partie $\mathcal{D}$ sur la figure de l'annexe (page 5).

b. Démontrer que l'aire, en unité d'aire, de $\mathcal{D}$ est $\frac{5}{3}\ln 2$.

Partie C. — On désigne par N un point quelconque de la droite Δ d'abscisse $x_N > 0$.

Peut-on choisir le point N de telle sorte que la droite $(\mathrm{A}N)$ sépare $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire ?

NOM : .... **Prénom : ....**

ANNEXE
À rendre avec sa copie

Exercice 4