Devoir surveillé de mathématiques

Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 4 exercices.

Exercice 1 (4 points) [Sujet A]

Cet exercice est un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Pour chaque question, on demande d'entourer sur le tableau de l'annexe (page 5) la lettre correspondant à la réponse exacte.

Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme $x+\mathrm{i}y$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+\mathrm{i})^4$. L'écriture exponentielle de z est :

a. $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ **b.** $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ **c.** $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **d.** $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ tels que $|z-1+\mathrm{i}|=\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|$ a pour équation :

a. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ **b.** $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ **c.** $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ **d.** $y=x+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0=1+\mathrm{i}$ et $Z_{n+1}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.

- **a.** Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- **b.** Pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}M_nM_{n+1}$ est équilatéral.
- **c.** La suite (U_n) définie par $U_n=|Z_n|$ est convergente.
- **d.** Pour tout entier naturel n, un argument de $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.

4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$Z_{\mathrm{A}}=-1-\mathrm{i}\quad;\quad Z_{\mathrm{B}}=2-2\mathrm{i}\quad\text{et}\quad Z_{\mathrm{C}}=1+5\mathrm{i}.$$

On pose $Z=\dfrac{Z_{\mathrm{C}}-Z_{\mathrm{A}}}{Z_{\mathrm{B}}-Z_{\mathrm{A}}}$.

- **a.** Z est un nombre réel.
- **b.** Le triangle ABC est isocèle en A.
- **c.** Le triangle ABC est rectangle en A.
- **d.** Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

Exercice 2 (6 points)

Partie A. — Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe (page 5), on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
Quelle interprétation graphique peut-on donner de la limite en 1 ?

2. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

3. En déduire que, pour tout réel $x \geq \mathrm{e}$, $f(x) \geq \mathrm{e}$.

Partie B. — Etude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ c'est-à-dire $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln u_n}$.

1. Sur l'annexe (page 5), en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 de coordonnées respectives $(u_0\,;0)$, $(u_1\,;0)$ et $(u_2\,;0)$. On laissera apparents les traits de construction.
Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq \mathrm{e}$.

b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 7 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,719
    | Affecter (X/ln X) à X
    | Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

a. Justifier que l'algorithme se termine.

b. A l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	7	3,597288397	2,809985662	2,719746168	2,718282223	2,718281829

EXERCICE 3 (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AD].

1. **a.** Démontrer que les droites (IJ) et (FH) sont parallèles et que $IJ = \frac{1}{2}FH$.

b. En déduire que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes en un point K.

c. Déterminer l'intersection des plans (ABF) et (ADH) et en déduire que K appartient à la droite (AE).

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Ainsi, les coordonnées des sommets du cube sont $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.

2. **a.** Calculer les coordonnées des points I et J.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FI) et une représentation paramétrique de la droite (HJ).

c. En déduire que les coordonnées de K sont $(0;0;-1)$.

d. Justifier que A est le milieu de [EK].

3. On considère le milieu P de [FH] et le point L tel que $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LH} = \overrightarrow{0}$.

a. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LH} = 2\overrightarrow{LP}$.

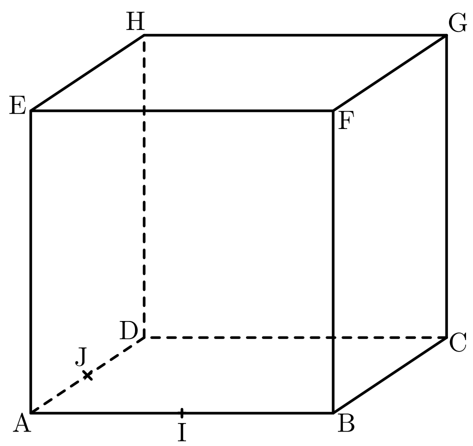
b. En déduire que $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$.

c. Calculer les coordonnées du point P et en déduire que les coordonnées de L sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

d. Démontrer que le triangle ALC est rectangle en L.

4. **a.** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont coplanaires.

b. Que peut-on en déduire concernant les points C, G, K et L ?



EXERCICE 4 (5 points)

Dans un département, deux hypermarchés concurrents sont implantés : l'hypermarché A et l'hypermarché B. En 2013, les deux hypermarchés ont 300 000 clients chacun.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre de clients, en milliers, de l'hypermarché A la n-ième année après 2013, et b_n le nombre de clients, en milliers, de l'hypermarché B la n-ième année aprés 2013.
Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Une étude statistique réalisée entre 2000 et 2010 conduit à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \ \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}6b_n + 70 \end{cases}.$$

1. Calculer a_1 et b_1.

2. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

3. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- **b.** En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.
- **c.** Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$.

- **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.
- **b.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

- **a.** Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n.
  En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
- **b.** Estimer, à long terme, le nombre de clients de chaque hypermarché.
- **c.** En quelle année le nombre total de clients de deux hypermarchés dépassera-il 649 000 ?

NOM : .... **Prénom :** ....

ANNEXE
A détacher et à rendre avec sa copie

Exercice 1. — Réponses au Q.C.M. [Sujet A]

Questions	Réponses			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d

Exercice 2