

# Devoir surveillé de mathématiques

## Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

### EXERCICE 1 (4 points)

On considère la fonction  $f$  qui à tout nombre complexe  $z$  associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1.
  - a. Calculer l'image de  $1 + 2i$  par la fonction  $f$ .
  - b. Démontrer que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ .
  - c. Déduire des questions précédentes la valeur de  $f(1 - 2i)$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 5$ .
3. Déterminer l'ensemble des réels  $k$  pour lesquels l'équation  $f(z) = k$  admet deux solutions complexes conjuguées distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions.)
4. Dans cette question, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
Soit  $z$  un nombre complexe. On écrit  $z$  sous forme algébrique  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.
  - a. Montrer que la forme algébrique de  $f(z)$  est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + 2iy(x + 1).$$

- b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  est telle que  $f(z)$  soit un nombre réel.  
Montrer que (E) est la réunion de deux droites  $D_1$  et  $D_2$  dont on précisera les équations.

## EXERCICE 2 (4 points)

*Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte.*

*Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*

*Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.*

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage qui a les propriétés suivantes :

- la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est 0,99 (sensibilité du test) ;
- la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note  $V$  l'événement « la personne est contaminée par le virus » et  $T$  l'événement « le test est positif ».

Les deux parties sont indépendantes.

### Partie A

1. La probabilité de l'événement  $\bar{V} \cap T$  est égale à :

- a) 0,0198    b) 0,0294    c) 0,97    d) 0,99.

2. La probabilité que le test soit positif est :

- a) 0,0198    b) 0,0294    c) 0,0492    d) 0,99.

**Partie B.** — On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard et on considère que les tirages sont indépendants. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

3.  $P(X = 1)$  arrondie à 0,001 près vaut :

- a) 0,016    b) 0,167    c) 0,02    d) 0,984.

4. La probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes contaminées parmi les 10, arrondie à 0,0001 près, est :

- a) 0,0009    b) 0,0153    c) 0,0162    d) 0,9991.

### EXERCICE 3 (7 points)

**Partie A.** — On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ .

1. Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
2. Calculer  $g'(x)$  pour tout réel  $x$ , étudier son signe avec précision et en déduire les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une solution unique que l'on notera  $\alpha$ .
5. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
6. Déterminer le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B.** — On considère la fonction  $f$  définie sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$ . On notera  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Déterminer la limite de  $f$  en  $\frac{1}{2}$ . Que peut-on en déduire pour  $\mathcal{C}$  ?
2. Montrer que, pour tout  $x \in ]\frac{1}{2}; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$ . En déduire le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in ]\frac{1}{2}; +\infty[$ .
3. Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ .
4. En utilisant la définition de  $\alpha$  (question 4 de la partie A), exprimer  $\alpha^3$  et  $\alpha^2$  en fonction de  $\alpha$  puis démontrer que  $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$ .  
En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .

**Partie C.** — On a représenté sur l'annexe (page 5) la courbe  $\mathcal{C}$ .

1. Tracer sur cette annexe la droite  $D$  d'équation  $y = \frac{1}{4}x$ .
2. Conjecturer la position relative de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $D$  puis démontrer cette conjecture.
3. Si  $x$  est un réel appartenant à  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ , on note  $M$  et  $N$  les points d'abscisse  $x$  appartenant respectivement à  $\mathcal{C}$  et à  $D$ .  
Que peut-on dire de la distance  $MN$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ? On justifiera sa réponse.

## EXERCICE 4 (5 points)

A TRAITER SUR UNE FEUILLE SEPARÉE

On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1, \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $v_1$ .
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les valeurs de  $u_N$  et  $v_N$  pour la valeur de l'entier  $N$  demandée à l'utilisateur.

**Entrée :**  $N$  un entier naturel  
**Initialisation :**  $U$  prend la valeur ...  
 $V$  prend la valeur ...  
**Traitement :** Pour  $k$  variant de 1 à ...  
     $W$  prend la valeur  $U$   
     $U$  prend la valeur ...  
     $V$  prend la valeur ...  
Fin du Pour  
**Sortie :** Afficher  $U$   
Afficher  $V$

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la matrice colonne  $X_n$  par  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  et la matrice

$$A \text{ par } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- a. Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .
  - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n = A^n X_0$ .
4. On définit les matrices  $P$ ,  $P'$  et  $B$  par  $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ ,  $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ .
    - a. Calculer les produits  $PP'$ ,  $P'P$  et  $P'BP$ .
    - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = P'B^nP$ .
    - c. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de la matrice  $A^n$  en fonction de  $n$ .
  5.
    - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ .  
En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les expressions de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .
    - b. Déterminer alors les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Nom : ..... Prénom : .....

# Annexe

A rendre avec la copie

## Exercice 3

