Devoir surveillé de mathématiques
Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. **a.** Calculer l'image de $1 + 2\mathrm{i}$ par la fonction f.
   b. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
   c. Déduire des questions précédentes la valeur de $f(1 - 2\mathrm{i})$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
3. Déterminer l'ensemble des réels k pour lesquels l'équation $f(z) = k$ admet deux solutions complexes conjuguées distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions.)
4. Dans cette question, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{u}\,, \vec{v})$.
   Soit z un nombre complexe. On écrit z sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + 2\mathrm{i}y(x + 1).$$
   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Exercice 2 (4 points)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage qui a les propriétés suivantes :

– la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est 0,99 (sensibilité du test) ;
– la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. La probabilité de l'événement $\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{T}$ est égale à :

A) 0,0198 B) 0,99 C) 0,97 D) 0,0294.

2. La probabilité que le test soit positif est :

E) 0,0492 F) 0,99 G) 0,0198 H) 0,0294.

Partie B. — On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard et on considère que les tirages sont indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

3. $P(X = 1)$ arrondie à 0,001 près vaut :

I) 0,984 J) 0,167 K) 0,016 L) 0,02.

4. La probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes contaminées parmi les 10, arrondie à 0,0001 près, est :

M) 0,0153 N) 0,0009 O) 0,9991 P) 0,0162.

Exercice 3 (7 points)

Partie A. — On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x, étudier son signe avec précision et en déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique que l'on notera α.
5. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
6. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B. — On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$. On notera $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. Montrer que, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
4. En utilisant la définition de α (question 4 de la partie A), exprimer α^3 et α^2 en fonction de α puis démontrer que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Partie C. — On a représenté sur l'annexe (page 5) la courbe $\mathscr{C}$.

1. Tracer sur cette annexe la droite D d'équation $y = \frac{1}{4}x$.
2. Conjecturer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D puis démontrer cette conjecture.
3. Si x est un réel appartenant à $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, on note M et N les points d'abscisse x appartenant respectivement à $\mathscr{C}$ et à D.
   Que peut-on dire de la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$? On justifiera sa réponse.

Exercice 4 (5 points)

A TRAITER SUR UNE FEUILLE SEPARÉE

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les valeurs de u_N et v_N pour la valeur de l'entier N demandée à l'utilisateur.

Entrée :	N un entier naturel
Initialisation :	U prend la valeur ...
	V prend la valeur ...
Traitement :	Pour k variant de 1 à ...
	W prend la valeur U
	U prend la valeur ...
	V prend la valeur ...
	Fin du Pour
Sortie :	Afficher U
	Afficher V

3. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

4. On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer les produits PP', $P'P$ et $P'BP$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

Nom : .... **Prénom :** ....

Annexe

A rendre avec la copie

Exercice 3