Correction du devoir surveillé de mathématiques du 14/12/2013

Exercice 1

1. Si $z = 1 + \mathrm{i}$ alors $z' = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})} = \dfrac{1^2+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}-1-\mathrm{i}} = \dfrac{1+2\mathrm{i}-1}{-1}$ c'est-à-dire $\boxed{z' = -2\mathrm{i}}$.

2. Pour tout $z \neq \mathrm{i}$,

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{z^2}{\mathrm{i}-z} = z \Leftrightarrow z^2 = z(\mathrm{i}-z) \Leftrightarrow z^2 - z(\mathrm{i}-z) = 0 \Leftrightarrow z[z-(\mathrm{i}-z)] = 0$$
$$\Leftrightarrow z(2z-\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } 2z-\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

Les points M tels que $z' = z$ sont le point d'affixe 0 i.e. l'origine O du repère et le point d'affixe $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ i.e. le milieu de [OA].

3. a. On écrit z' sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{(x+\mathrm{i}y)^2}{\mathrm{i}-(x+\mathrm{i}y)} = \frac{x^2+2\mathrm{i}xy-y^2}{-x+\mathrm{i}(1-y)} = \frac{(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)[-x-\mathrm{i}(1-y)]}{x^2+(1-y)^2} \\ &= \frac{-x^3+xy^2-2\mathrm{i}x^2y-\mathrm{i}(x^2-y^2)(1-y)+2xy(1-y)}{x^2+(1-y)^2} \\ &= \frac{-x^3+xy^2+2xy(1-y)}{x^2+(1-y)^2} + \mathrm{i}\frac{-2x^2y-(x^2-y^2)(1-y)}{x^2+(1-y)^2} \end{aligned}$$

donc la partie réelle de z' est

$$\mathrm{Re}(z') = \frac{-x^3+xy^2+2xy(1-y)}{x^2+(1-y)^2} = \frac{-x[x^2-y^2-2y(1-y)]}{x^2+(1-y)^2} = \frac{-x(x^2-y^2-2y+2y^2)}{x^2+(1-y)^2}$$

soit $\boxed{\mathrm{Re}(z') = \dfrac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}}$.

b. En utilisant la question précédente,

$$M \in (E) \Leftrightarrow z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -x(x^2+y^2-2y) = 0 \\ x^2+(1-y)^2 \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x^2+y^2-2y = 0 \\ (x\,;y) \neq (0\,;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } (x-0)^2+(y-1)^2 = 1 \\ (x\,;y) \neq (0\,;1) \end{cases}$$

On conclut que (E) est la réunion de la droite d'équation $x = 0$ (i.e. l'axe des ordonnées) privée du point A et du cercle de centre A et de rayon 1.

Exercice 2 (enseignement obligatoire)

L'affirmation 1 est VRAIE. En effet, si (u_n) est une suite réelle monotone et bornée alors il y a deux cas possibles :

- si (u_n) est croissante alors, comme (u_n) est bornée, en particulier (u_n) est majorée. Or, d'après le théorème des suites monotones, toute suite réelle croissante et majorée converge donc (u_n) est convergente.
- si (u_n) est décroissante alors, comme (u_n) est bornée, en particulier (u_n) est minorée. Or, d'après le théorème des suites monotones, toute suite réelle décroissante et minorée converge donc (u_n) est convergente.

Dans tous les cas, (u_n) est convergente.

L'affirmation 2 est FAUSSE. En effet, si on considère, par exemple, la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n+1$ et (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1-n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$.

L'affirmation 3 est FAUSSE. En effet, si on considère, par exemple, la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+1)^2$ et (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n+1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty \neq 1$.

L'affirmation 4 est VRAIE. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq n+1$ donc $0 \leq \dfrac{n}{n+1} \leq 1$ donc (u_n) est bornée par 0 et 1. (On peut faire mieux et montrer que (u_n) est bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1 mais ce n'est pas nécessaire ici.)

L'affirmation 5 est VRAIE. Montrons-le par récurrence. Soit la proposition P_n : « $t_{n+1} \leq t_n$ ».

Comme $t_1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{4}\right) + \dfrac{2}{3} = \dfrac{19}{16} \leq \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{4} = t_0$, la proposition P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, comme l'énoncé précise que $t_n \geq 0$ pour tout entier naturel n, on a $0 \leq t_{k+1} \leq t_k$ donc, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $t_{k+1}^2 \leq t_k^2$. En multipliant par $\dfrac{1}{3} > 0$, il s'ensuit que $\dfrac{1}{3}t_{k+1}^2 \leq \dfrac{1}{3}t_k^2$ et donc $\dfrac{1}{3}t_{k+1}^2 + \dfrac{2}{3} \leq \dfrac{1}{3}t_k^2 + \dfrac{2}{3}$ i.e. $t_{k+2} \leq t_{k+1}$. Ainsi, le proposition P_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} \leq t_n$ donc la suite (t_n) est décroissante.

EXERCICE 2 (enseignement de spécialité)

L'affirmation 1 est VRAIE. On peut, par exemple, le démontrer à l'aide d'un tableau de restes modulo 7 :

Reste de n modulo 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de $n^6 - 1$ modulo 7	6	0	0	0	0	0	0
Reste de $n(n^6 - 1)$ modulo 7	0	0	0	0	0	0	0

Dans tous les cas, $n(n^6 - 1) \equiv 0$ [7] donc 7 divise $n(n^6 - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'affirmation 2 est FAUSSE. Prenons, par exemple, $a = 2$, $p = 4$, $q = 1$ et $n = 3$. Alors, on a bien $p \equiv q$ $[n]$. Mais $a^p = 2^4 = 16$ et $a^q = 2$ donc $a^p - a^q = 14$ n'est pas divisible par $n = 3$ donc $a^p \not\equiv a^q$ $[n]$.

L'affirmation 3 est FAUSSE. Prenons, par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, à l'aide de la calculatrice, on obtient $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

L'affirmation 4 est VRAIE. Démontrons-le par récurrence. Soit la proposition P_n : « $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$ ».

Alors, $\begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 1 \times 2^{1-1} & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A = A^1$ donc P_1 est vraie.

Supposons P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, en calculant $A^{k+1} = A \times A^k$, on obtient

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \times 2^k & 0 \\ 1 \times 2^k + 2 \times k2^{k-1} & 2 \times 2^k \end{pmatrix} \end{array}$$

c'est-à-dire $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 2^k + k2^k & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ (k+1)2^k & 2^{k+1} \end{pmatrix}$.

Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.

L'affirmation 5 est VRAIE. Calculons le produit MN :

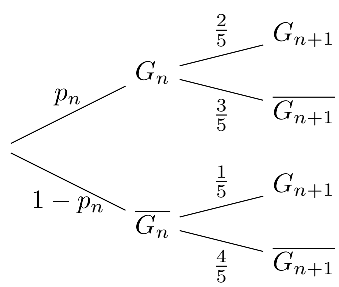
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -a & b & a \\ b & -2b^3 & b \\ a & b & -a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2ab & -2ab^3+b^2 & 0 \\ 0 & 2ab & 0 \\ 0 & b^2-2ab^3 & 2ab \end{pmatrix} \end{array}$$

Or, par hypothèse, $2ab = 1$ et donc $-2ab^3 + b^2 = (-2ab+1)b^2 = (-1+1)b^2 = 0$. De la même façon, $b^2 - 2ab^3 = 0$ et donc $MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i.e. $MN = I_3$. Ainsi, M est inversible et $M^{-1} = N$.

Exercice 3

Partie A

1.



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'arbre, $P(G_{n+1}) = p_n \times \dfrac{2}{5} + (1-p_n) \times \dfrac{1}{5}$ i.e. $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}p_n$ soit $\boxed{p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

i.e. $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n$. Ainsi, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{1}{5}}$. De plus, son premier terme est $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{4}$ soit $\boxed{u_1 = \dfrac{3}{4}}$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ i.e. $u_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + \dfrac{1}{4}$ donc $\boxed{p_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}}$.

c. Etant donné que $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et donc, par produit et somme, $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{4}}$.

Partie B

1. a. Jouer une partie constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{4}$ en prenant comme succès S : « le joueur gagne la partie». Jouer 10 parties successivement et de façon indépendante revient à répéter cette épreuve 10 fois de façon identique et indépendante : cela constitue donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{4}$. On en déduit que la variable aléatoire X qui compte le nombre de parties gagnées i.e. le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

b. La probabilité de gagner au moins une partie est $P(X \geq 1)$. Or, comme X prend des valeurs entières, $\overline{(X \geq 1)} = (X = 0)$ donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{P(X \geq 1) \approx 0{,}94}$.

c. Par théorème, l'espérance de X est $E(X) = 10 \times \dfrac{1}{4}$ soit $\boxed{E(X) = 2{,}5}$.

2. **a.** D'après la question précédente, en moyenne, un joueur gagne 2,5 parties sur 10 donc, sachant qu'il paye 30 euros pour jouer et que chaque partie gagnée lui rapporte 8 euros, son gain algébrique moyen est $2{,}5 \times 8 - 30 = -10$ euros. Ce gain algébrique est négatif donc ce jeu est désavantageux pour le joueur.

b. On rappelle que X désigne le nombre de parties gagnées. Le bénéfice est supérieur à 40€ signifie que $8X - 30 \geq 40$ i.e. $8X \geq 70$ soit $X \geq \dfrac{70}{8} = 8{,}75$. Comme X prend des valeurs entières, on en déduit que le bénéfice est supérieur à 40€ si et seulement si $X \geq 9$. A l'aide de la calculatrice, on en déduit que la probabilité que le joueur réalise un bénéfice supérieur à 40€ est $\boxed{P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) \approx 3.10^{-5}}$.

Exercice 4

Partie A. – Etude d'une fonction auxiliaire h

1. La fonction h est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\boxed{h'(x) = 6x^2 - 8x + 2 = 2(3x^2 - 4x + 1)}.$$

2. Pour tout réel x, le signe de $h'(x)$ est le signe du trinôme $3x^2 - 4x + 1$. Le discriminant de ce dernier est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 > 0$ donc ce trinôme admet deux racines réelles qui sont $x_1 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 3} = 1$. Comme $a = 3 > 0$, on en déduit que $h'(x) < 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[\cup]1\,;+\infty[$ et $h'(x) < 0$ pour tout $x \in \left]\frac{1}{3}\,;1\right[$. Il s'ensuit que h est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$, strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{3}\,;1\right[$ et strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

3. Comme h est une fonction polynôme $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$.

4. On aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Variations de h	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{89}{27}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

5. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, le minimum de h est 3 donc $h(x) > 0$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$. En particulier, h ne s'annule pas sur $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$, la fonction h est continue car dérivable et strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{-\infty} h = -\infty$, $h(\frac{1}{3}) = \frac{89}{27}$ et $0 \in \left]-\infty\,;\frac{89}{27}\right]$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ tel que $h(\alpha) = 0$.

On conclut donc que $\boxed{\text{l'équation } h(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \mathbb{R}}$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx -0{,}59}$.

6. Comme h est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ et s'annule en α, $h(x) \leq 0$ si $x \leq \alpha$ et $h(x) \geq 0$ si $x \in \left[\alpha\,;\frac{1}{3}\right]$. De plus, on a vu que $h(x) > 0$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$. On conclut donc que

$$\boxed{h(x) \leq 0 \text{ si } x \leq \alpha \text{ et } h(x) \geq 0 \text{ si } x \geq \alpha.}$$

Partie B. – Etude d'une fonction f

1. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-(2x+1)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

2. Etude au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2}$.

Etude au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2}$.

On déduit de ces limites que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

3. Etude au voisinage de 1

$\lim\limits_{x\to1} 2x+1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to1} x-1 = 0$. De plus, si $x < 1$, $x-1 < 0$ et si $x > 1$, $x-1 > 0$. On en déduit, par quotient, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty}$.

On déduit de ces limites que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie C. – Etude des positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

1. Soit un réel $x \neq 1$. Alors,

$$d(x) = x^2+1-\frac{2x+1}{x-1} = \frac{(x^2+1)(x-1)-(2x+1)}{x-1} = \frac{x^3-x^2+x-1-2x-1}{x-1} = \frac{x^3-x^2-x-2}{x-1}.$$

Or, $(x-2)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-2x^2-2x-2 = x^3-x^2-x-2$ donc $\boxed{d(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-1}}$.

2. Le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = 1^2-4\times1\times1 = -3 < 0$ donc x^2+x+1 est du signe de $a = 1 > 0$ pour tout réel x. Ainsi, le signe de $d(x)$ est le signe de $\dfrac{x-2}{x-1}$. On peut étudier celui-ci à l'aide d'un tableau :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $d(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit que sur $]-\infty\,;1[$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$, sur $]1\,;2[$, $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$ et sur $]2\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$. De plus, les deux courbes se coupent au point A d'abscisse 2 et d'ordonnée $f(2) = 5$.

3. a. Soit $x \in\,]-\infty\,;1[$. Alors,

$$d'(x) = g'(x)-f'(x) = 2x-\frac{-3}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)^2+3}{(x-1)^2} = \frac{2x(x^2-2x+1)+3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-4x^2+2x+3}{(x-1)^2}$$

c'est-à-dire $\boxed{d'(x) = \dfrac{h(x)}{(x-1)^2}}$ où h est la fonction définie en partie A.

b. Pour tout $x \in\,]-\infty\,;1[$, le signe de $d'(x)$ est le signe de $h(x)$. Or, on a vu en question A.6. que $h(x) \leq 0$ si $x \leq \alpha$ et $h(x) \geq 0$ si $x \geq \alpha$. De plus, $\alpha \approx -0{,}59$ donc $\alpha \in\,]-\infty\,;1[$. On en déduit que d est décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;1[$. En particulier, d atteint son minimum sur $]-\infty\,;1[$ en α. Ainsi, $\boxed{\text{sur }]-\infty\,;1[\text{, l'écart } d(x) \text{ est minimal pour } x = \alpha}$.

c. Par définition, le coefficient directeur de T_f est $f'(\alpha)$ et celui de T_g est $g'(\alpha)$. Or,

$$g'(\alpha) - f'(\alpha) = d'(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{(\alpha - 1)^2} = 0$$

car $h(\alpha) = 0$. Ainsi, $g'(\alpha) = f'(\alpha)$ et donc $\boxed{\text{les droites } T_f \text{ et } T_g \text{ sont parallèles}}$.