Devoir surveillé de mathématiques

Durée : 2 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 (5 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 + 4z^2 + 21z + 34$.

1. **a.** Calculer $P(-2)$.

   b. Montrer que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z+2)(z^2 + 2z + 17)$.

   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = -2$, $z_\mathrm{B} = -1 + 4\,\mathrm{i}$ et $z_\mathrm{C} = -1 - 4\,\mathrm{i}$.

   a. Faire une figure et placer les points A, B et C.

   b. Déterminer, par un raisonnement qui fera intervenir des calculs d'affixes, l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE. Justifier la réponse avec précision. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. Si z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 4z + 6 = 0$ alors $z_1 + z_2$ est imaginaire pur.
2. La partie réelle de $\dfrac{13+2\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}$ est $\dfrac{13}{5}$.
3. Pour tout nombre complexe z non nul, $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ est réel.
4. L'unique solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{\mathrm{i}}{\overline{z}+2} = 2$ est $z = -1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$.
5. Pour tout entier naturel k, $(1+\mathrm{i})^{4k+2}$ est imaginaire pur.

Exercice 3 (10 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? (On justifiera ses réponses.)

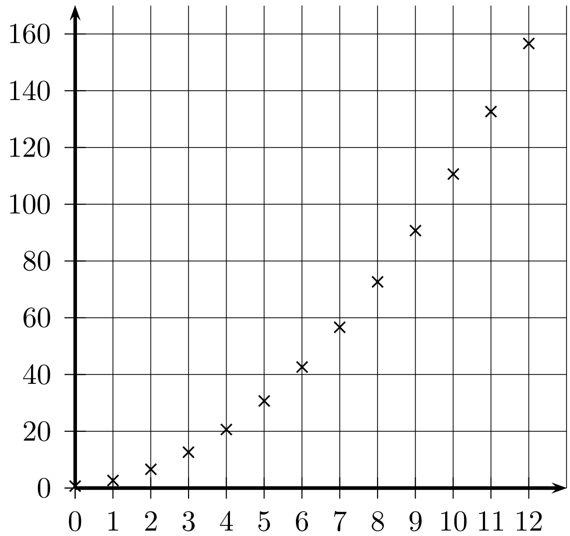
3. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n		Pour i allant de 0 à $n-1$
	u prend la valeur $u + 2i + 2$		u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

4. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau suivant qui a permis de construire le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

b. Démontrer cette conjecture.

5. La forme parabolique du nuage de points ci-dessus peut laisser penser qu'il existe trois réels a, b et c tels que $u_n = an^2 + bn + c$ pour tout entier naturel n.

a. En utilisant les valeurs de u_0, u_1 et u_2, démontrer que si ces trois réels existent alors $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n$.

6. Dans cette question, on se propose de retrouver le résultat de la question 5.b. par une autre méthode. Pour cela, on définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. En utilisant la définition de (u_n), exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis retrouver le résultat de la question 5.b.

7. On considère deux réels r et t et on note (w_n) la suite définie par $w_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + rn + t$.

En s'inspirant de la démarche de la question 6, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de w_n en fonction de n.