Devoir surveillé de mathématiques

Durée : 2 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45$.

1. **a.** Calculer $P(3\mathrm{i})$.
   b. Soit w un nombre complexe. Démontrer que si $P(w) = 0$ alors $P(\overline{w}) = 0$.
   c. Déduire des questions précédentes deux solutions distinctes de l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2 + 9)(z^2 - 4z + 5)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2 (6 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE. Justifier la réponse avec précision. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. La forme algébrique de $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \mathrm{i}}$ est $\dfrac{\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$.
2. Pour tous nombres complexes z et z', la partie réelle de $(1 + \mathrm{i}z)(2 - \mathrm{i}z')$ est $2 + zz'$.
3. Pour tout nombre complexe z, le conjugué de $\dfrac{1 + \mathrm{i}z}{1 + 3\mathrm{i}}$ est $\dfrac{1 - \mathrm{i}z}{1 - 3\mathrm{i}}$.
4. L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $z^2 + 2\overline{z}$ est réel est la droite d'équation $x = 1$.
5. Pour tout nombre complexe z non nul, si $z + \dfrac{1}{z}$ est un imaginaire pur alors le nombre $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est réel.
6. Pour tout entier naturel n, $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{3n}$ est un réel.

Exercice 3 (10 points)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p | Affecter à u la valeur $0{,}5u + 0{,}5k - 1{,}5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5.$$

1. On souhaite disposer d'un algorithme qui affiche en sortie la valeur de u_p pour une valeur de p donnée en entrée.

Expliquer pourquoi l'algorithme de la **partie A** ne convient pas et indiquer comment le modifier pour obtenir l'affichage voulu.

2. À l'aide de l'algorithme modifié, on obtient les résultats suivants :

n	0	1	2	3
u_n	5	1	$-0{,}5$	$-0{,}75$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?
Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).