Corrigé du devoir surveillé de mathématiques du 12 mai 2018

Exercice 1

1. Remarquons tout d'abord que D_1 et D_2 ne sont pas parallèles. En effet, un vecteur directeur de D_1 est $\overrightarrow{v_1}\,(1\,;1\,;-2)$ et un vecteur directeur de D_2 est $\overrightarrow{v_2}\,(-1\,;-2\,;1)$. Ainsi, $x_{\overrightarrow{v_1}} \times y_{\overrightarrow{v_2}} = -2 \neq -1 = x_{\overrightarrow{v_2}} \times y_{\overrightarrow{v_1}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires et ainsi D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.
Étudions $D_1 \cap D_2$:

$$\begin{cases} 1+t=2-s \\ t=5-2s \\ 1-2t=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+5-2s=2-s \\ t=5-2s \\ 1-2(5-2s)=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=s \\ t=5-2s \\ 1-10+4s=s \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} s=4 \\ t=5-2s \\ 3s=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=4 \\ t=5-2s \\ s=3 \end{cases}.$$

Les première et la troisième égalités du dernier système sont incompatibles donc $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.
Ainsi, D_1 et D_2 ne sont ni sécantes ni parallèles donc elles sont non coplanaires.
On conclut que $\boxed{\text{L'affirmation 1 est vraie}}$.

2. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$:
$\overrightarrow{AB}\,(1-1\,;-1-1\,;0-0)$ i.e. $\overrightarrow{AB}\,(0\,;-2\,;0)$
$\overrightarrow{AC}\,(1-1\,;-1-1\,;1-0)$ i.e. $\overrightarrow{AC}\,(0\,;-2\,;1)$
$\overrightarrow{AD}\,(0-1\,;1-1\,;1-0)$ i.e. $\overrightarrow{AD}\,(-1\,;0\,;1)$.
Étudions ensuite la coplanarité de ces trois vecteurs. Il est clair de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires puisqu'ils ont mêmes abscisses et ordonnées mais pas même côtes. Il s'agit donc d'étudier l'existence de deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. En coordonnées, cela se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} -1=a\times 0+b\times 0 \\ 0=a\times(-2)+b\times(-2) \\ 1=a+b\times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=0 \\ 0=-2a-2b \\ 1=b \end{cases}.$$

La première égalité du dernier système est absurde donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non coplanaires et donc, par théorème, A, B, C et D sont non coplanaires.
On conclut que $\boxed{\text{l'affirmation 2 est fausse}}$.

3. Soit $M \in \Delta$. Alors, il existe un réel t tel que $M\,(1+t\,;2t\,;1+t)$. Comme le repère est orthonormée, il s'ensuit que

$$\mathrm{A}M^2 = (1+t-1)^2 + (2t-2)^2 + (1+t-3)^2 = t^2 + (2t-2)^2 + (t-2)^2$$

et
$$\mathrm{B}M^2 = (1+t-3)^2 + (2t-2)^2 + (1+t-1)^2 = (t-2)^2 + (2t-2)^2 + t^2.$$
Ainsi, $\mathrm{A}M^2 = \mathrm{B}M^2$ donc, comme ce sont des distances, $\mathrm{A}M = \mathrm{B}M$.
On conclut que $\boxed{\text{L'AFFIRMATION 3 EST VRAIE}}$.

4. Soit $a > 0$. Alors,
$$I_a = \int_a^{2a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_a^{2a} = \ln(2a) - \ln(a) = \ln\left(\frac{2a}{a}\right) = \ln(2).$$
Ainsi, la valeur de I_a est $\ln(2)$ quelle que soit la valeur de a.
On conclut que $\boxed{\text{L'AFFIRMATION 4 EST VRAIE}}$.

Exercice 2

Partie A

1. D'après le tableau, $g(\frac{1}{2}) = 0$ et de $g(1) = 2$.

2. D'après le tableau, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$.
Par ailleurs,
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} a = a.$$
On conclut que $\boxed{a = 2}$.

3. D'après la question précédent, pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \frac{2x^2+bx+c}{x^2}$. De plus, $2 = g(1) = \frac{2\times 1^2+b\times 1+c}{1^2} = 2+b+c$ donc $b+c = 0$ i.e. $c = -b$.
D'autre part,
$$0 = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\times(\frac{1}{2})^2 + b\times\frac{1}{2} + c}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{b}{2}+c}{\frac{1}{4}} = \left[\frac{1}{2}+\frac{b}{2}+c\right]\times 4 = 2+2b+4c$$
donc $2+2b+4c = 0$. Or, $c = -b$ donc $2+2b-4b = 0$ i.e. $2-2b = 0$. Ainsi, $2b = 2$ i.e. $b = 1$ et donc $c = -1$.
On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ g(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2}}$.

Partie B

1. Étant donné que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on déduit, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. **a.** Soit $x > 0$. Alors,
$$2x + \frac{1}{x}\left[1 - \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right] = 2x + \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{1}{x} - (-\ln(x)) = 2x + \frac{1}{x} + \ln(x).$$
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ f(x) = 2x + \frac{1}{x}\left[1 - \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right]}$.

b. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et, par théorème, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 0$. Par somme, il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 - \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$ et donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\left[1 - \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right] = +\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, on conclut, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty}$.

3. a. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}$$

i.e. $\boxed{f'(x) = g(x)}$.

b. Grâce au tableau de variation de g, on peut voir que g est négative sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et positive sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. On en déduit qu'il en est de même pour f' donc f est décroissant sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

En remarquant que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 - \ln(2),$$

on aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$3 - \ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. La fonction g est continue et positive sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ donc

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, d'après la **partie B**, f est une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$ donc

$$\mathcal{A} = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \ln(1) + 1 - (3 - \ln(2)) = 3 - 3 + \ln(2)$$

donc $\boxed{\mathcal{A} = \ln(2)}$.

2. Soit $k > 1$. D'après le tableau de variation de g, pour tout réel $x \geqslant 1$, $g(x) \geqslant 2$ donc, comme g est continue sur $]0\,;+\infty[$,

$$\mathcal{A}_k = \int_1^k g(t)\,\mathrm{d}t = f(k) - f(1) = f(k) - 3.$$

Ainsi,

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A} \Leftrightarrow f(k) - 3 = \ln(2) \Leftrightarrow f(k) = 3 + \ln(2).$$

Or, sur $[1\,;+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et, de plus, $f(1) = 3 - \ln(2) < 3 + \ln(2)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $3 + \ln(2) \in \left[f(1)\,;\lim\limits_{+\infty} f\right[$.

On déduit donc du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe au moins un réel $k \in [1\,;+\infty[$ tel que $f(k) = 3 + \ln(2)$ i.e. tel que $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$.

Remarque. — Comme f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$, le réel k est en fait unique.

Exercice 3

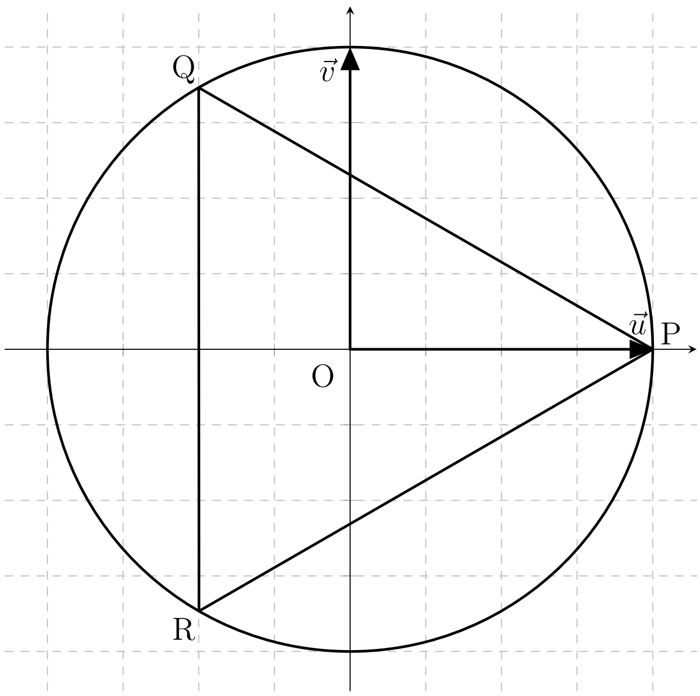
1. **a.** On remarque que $\mathrm{j} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ donc $\boxed{\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$.

   b. Ainsi,
$$-\frac{1}{\mathrm{j}} = -\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)}$$
i.e. $\boxed{-\frac{1}{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.

2. **a.** Le discriminant du trinôme z^2+z+1 est $\Delta = 1^2-4\times1\times1 = -3 < 0$ donc l'équation $z^2+z+1=0$ admet deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\times1} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\mathrm{j}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{j}.$$
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } z^2+z+1=0 \text{ est } \{\mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\}}$.

   b. D'après la question précédente, $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$ donc $\boxed{\mathrm{j}^2 = -1-\mathrm{j}}$.

3. **a.**



   b. Montrons que PQR est équilatéral. En effet,
$\mathrm{PQ} = |\mathrm{j}-1| = \left|-\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}\,;$
$\mathrm{PR} = \left|\mathrm{j}^2-1\right| = |-1-\mathrm{j}-1| = |-2-\mathrm{j}| = \left|-\frac{3}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\overline{-\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \mathrm{PQ}\,;$
$\mathrm{QR} = \left|\mathrm{j}^2-\mathrm{j}\right| = |\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)| = |\mathrm{j}|\,|\mathrm{j}-1| = 1\times\mathrm{PQ} = \mathrm{PQ}.$
Ainsi, $\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=\mathrm{QR}$ donc $\boxed{\text{PQR est un triangle équilatéral}}$.

4. **a.** Par hypothèse, $a+\mathrm{j}b+\mathrm{j}^2c=0$ et, d'après la question 2.b, $\mathrm{j}^2=-\mathrm{j}-1$ donc $a+\mathrm{j}b+(-\mathrm{j}-1)c=0$ i.e. $a-c+\mathrm{j}(b-c)=0$. Ainsi, on conclut que $\boxed{a-c=\mathrm{j}(c-b)}$.

   b. Il s'ensuit que $\mathrm{AC} = |c-a| = |\mathrm{j}(c-b)| = |\mathrm{j}|\,|(c-b)| = 1\times\mathrm{CB}$ donc $\boxed{\mathrm{AC}=\mathrm{BC}}$.

c. On a

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{CB}\right) \ [2\pi] = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{CB}\right) \ [2\pi]$$
$$= -\arg(a-c) + \arg(b-c) \ [2\pi] = \arg(b-c) - \arg(a-c) \ [2\pi]$$
$$= \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \ [2\pi].$$

Or, d'après les questions 1.b. et 4.a.,

$$\frac{b-c}{a-c} = -\frac{c-b}{a-c} = -\frac{1}{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

Dès lors,

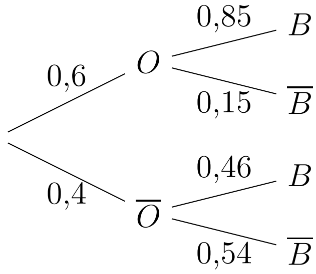
$$\boxed{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]}.$$

d. D'après la question 4.b, le triangle ABC est isocèle et d'après la question 4.c, il possède un angle de $\frac{\pi}{3}$ donc $\boxed{\text{ABC est équilatéral}}$.

Exercice 4

Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



2. Les évènements O et $\overline{O}$ formant une partition de l'univers, on a, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(O)P_O(B) + P(\overline{O})P_{\overline{O}}(B) = 0{,}6 \times 0{,}85 + 0{,}4 \times 0{,}46$$

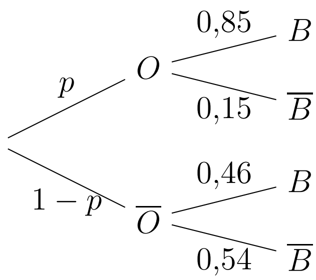
i.e. $\boxed{P(B) = 0{,}694}$.

3. La probabilité que la bouteille de jus de fruits soit un jus de pomme sachant qu'il s'agit d'un jus bio est

$$P_B(O) = \frac{P(O \cap B)}{P(B)} = \frac{P(O)P_O(B)}{P(B)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}85}{0{,}694}$$

i.e. $\boxed{P_B(O) \approx 0{,}735}$.

4. Représentons la situation par un arbre :



Comme dans la question 2, on a alors

$$P(B) = pP_O(B) + (1-p)P_{\overline{O}}(B) = p \times 0{,}85 + (1-p) \times 0{,}46 = 0{,}39p + 0{,}46.$$

On cherche donc p tel que $0{,}39p + 0{,}46 = \frac{80}{100}$ i.e. $0{,}39p = 0{,}8 - 0{,}46$ soit $p = \frac{0{,}34}{0{,}39} \approx 0{,}87$. Ainsi, pour atteindre 80% de jus bio, il faut qu'environ 87% des jus soient des jus de pomme.

Partie B

1. Choisir une bouteille au hasard constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,03 en prenant comme succès « l'étiquette de la bouteille est mal collée ».

Comme le stock est suffisamment grand pour assimiler le prélèvement de 40 bouteilles à un tirage avec remise, choisir 40 bouteilles au hasard revient à répéter successivement de façon indépendante cette épreuve : cela constitue un schéma de Bernoulli.

Ainsi, la variable aléatoire X qui compte le nombre de bouteille ayant une étiquette mal collée suit une loi binomiale $\mathscr{B}(40, 0{,}03)$.

2. À l'aide de la calculatrice, $\boxed{P(X=5) \approx 0{,}006}$.

3. À l'aide de la calculatrice, $\boxed{P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}118}$.

4. **a.** Par théorème, $\boxed{E(X) = 40 \times 0{,}03 = 1{,}2}$.

b. On en déduit qu'en moyenne, sur 40 bouteilles prises au hasard, 1,2 ont une étiquette mal collée.

5. Supposons qu'on prélève n bouteilles dans le stock (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et considérons l'événement A_n : « au moins une bouteille a une étiquette mal collée parmi les 40 prélevées ». Alors, son évènement contraire est $\overline{A_n}$: « les 40 bouteilles ont une étiquette bien collée ». Toujours en assimilant ce prélèvement à un tirage avec avec remise, on a, par indépendance,

$$P(\overline{A_n}) = (1-0{,}03)^n = 0{,}97^n$$

donc

$$P(A_n) = 1 - 0{,}97^n.$$

Or, on cherche n tel que $P(A_n) \geqslant 0{,}9$. On résout donc l'inéquation :

$$1 - 0{,}97^n \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - 0{,}9 \geqslant 0{,}97^n \Leftrightarrow 0{,}1 \geqslant 0{,}97^n.$$

Comme tous les nombres sont strictement positifs et comme $\ln(0{,}97 < 0$, il s'ensuit que

$$1 - 0{,}97^n \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow \ln(0{,}1) \geqslant n \ln(0{,}97) \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}97)} \leqslant n.$$

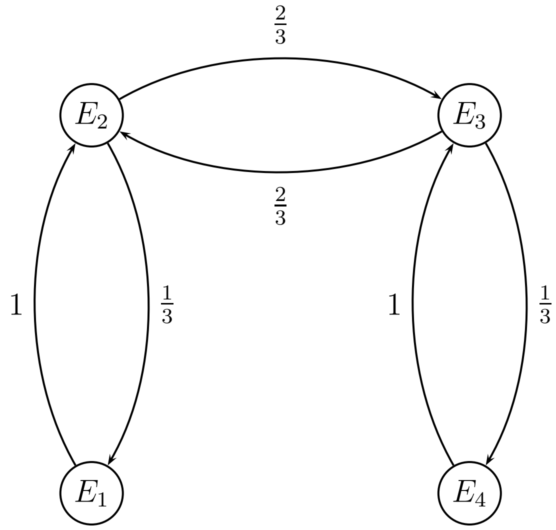
Comme $\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}97)} \approx 75{,}6$, on conclut que la probabilité d'obtenir au moins une bouteille avec une étiquette mal collée devient supérieure à 0,9 si on prélève au moins 76 bouteilles.

Exercice 4 (spécialité)

Partie A

1. Au début de la partie, les trois pièces sont du côté face donc X_0 est une évènement certain i.e. $x_0 = P(X_0) = 1$ et donc $U_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On peut représenter la situation par le graphe probabiliste suivant :



3. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n M$ donc (U_n) est une suite géométrique de matrices lignes de raison M. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 M^n$ et donc $U_{30} = U_0 M^{30}$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $U_{30} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}75 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{t_{30} = 0}$.

b. En fait, à l'issue de la partie n, le nombre p_n de pile à la même parité que n. Montrons-la par récurrence. Initialement, $p_0 = 0$ a bien la même parité que 0.
Supposons le résultat vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, à l'issue de la partie $k+1$, on a soit un pile en plus, soit un pile en moins donc $p_{k+1} = p_k + 1$ ou $p_{k+1} = p_k - 1$. Dans les deux cas, p_{k+1} à la parité contraire de celle de p_k donc, par hypothèse de récurrence, p_{k+1} à la parité contraire de celle de k i.e. p_{k+1} à la même parité que $k+1$ ce qui montre que le résultat est vrai $k+1$. On a donc montré le résultat par récurrence.
Ainsi, à la fin du jeu, après 30 parties, le nombre de pile est pair (puisque 30 est pair) : il ne peut donc pas y avoir 3 piles. Dès lors, T_{30} est un évènement impossible ce qui explique que $t_{30} = P(T_{30}) = 0$.

Partie B

1. Le nombre total de pièce retourné est égal au nombre de parties puisqu'on retourne une pièce à chaque partie. Ainsi, $a + b + c = 30$ et donc $\boxed{c = 30 - a - b}$.

2. Le nombre total de points du joueur à la fin du jeu est

$$T = 12 \times a + (-7) \times b + (-4) \times c = 12a - 7b - 4(30 - a - b) = 12a - 7b - 120 + 4a + 4b$$

i.e. $\boxed{T = 16a - 3b - 120}$.

3. a. Comme $16 \times 6 - 3 \times (-8) = 96 + 24 = 12$, $(6\,;-8)$ est bien une solution particulière de (E).

b. Soit $(x\,;y)$ une solution de (E). Alors, $16x - 3y = 120 = 16 \times 6 - 3 \times (-8)$ donc $16(x-6) = 3(y+8)$. Ainsi, 3 divise $16(x-6)$. Or, $16 - 3 \times 5 = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, 16 et 3 sont premiers entre eux. Dès lors, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $x - 6$ i.e. il existe un entier k tel que $x - 6 = 3k$ soit $x = 6 + 3k$. Par suite, $16(3k) = 3(y+8)$ donc $16k = y + 8$ i.e. $y = -8 + 16k$. On a donc montré que, si $(x\,;y)$ est une solution de (E) alors il existe un entier k tel que $x = 6 + 3k$ et $y = -8 + 16k$.
Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, $x = 6 + 3k$ et $y = -8 + 16k$. Alors,

$$16x - 3y = 16(6 + 3k) - 3(-8 + 16k) = 16 \times 6 - 3 \times (-8) + 16 \times 3k - 3 \times 16k = 120$$

donc $(x\,;y)$ est solution de (E).

On conclut donc que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \{(6+3k\,;-8+16k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.

c. À la fin du jeu, le total des points du joueur est nul donc $T = 0$ i.e. $16a - 3b = 120$. Dès lors, d'après la question précédente, il existe un entier k tel que $a = 6 + 3k$ et $b = -8 + 16k$ et donc $a + b = -2 + 19k$. Or, par définition, $0 \leqslant a + b = 30 - c \leqslant 30$ donc $0 \leqslant -2 + 19k \leqslant 30$ i.e. $2 \leq 19k \leq 32$ soit finalement $\frac{2}{19} \leqslant k \leqslant \frac{32}{19}$. Or, $\frac{2}{19} \approx 0{,}1$, $\frac{32}{19} \approx 1{,}7$ et k est entier donc $k = 1$.

On en déduit que $\boxed{a = 6 + 3 = 9,\ b = -8 + 16 = 8 \text{ et } c = 30 - a - b = 13}$.