Devoir surveillé de mathématiques

Durée : 2 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (5 points)

Des étudiants sont inscrits en L1 dans une université. À l'approche des examens, un stage de révision est organisé. L'expérience montre que $\frac{3}{4}$ des étudiants ayant suivi le stage de révision réussissent leurs examens et $\frac{1}{3}$ des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne réussissent pas leurs examens. On sait de plus que 20% des étudiants de L1 suivent le stage de révision.

On choisit un étudiant au hasard et on considère les évènements :
S : « l'étudiant a suivi le stage de révision » et R : « l'étudiant a réussi ses examens ».

1. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation étudiée.
2. Si l'étudiant choisi a suivi le stage, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas réussi ses examens ?
3. Quelle est la probabilité que l'étudiant choisi ait suivi le stage et réussi ses examens ?
4. Montrer que la probabilité que l'étudiant choisi ait réussi ses examens est $\frac{41}{60}$.
5. Sachant que l'étudiant choisi a réussi ses examens, quelle est la probabilité qu'il ait suivi le stage ? On donnera la valeur exacte sous forme d'une fraction irréductible puis une valeur approchée à 0,01 près.
6. L'université trouve que les résultats aux examens de L1 sont trop faibles et aimerait inciter plus d'étudiants à s'inscrire au stage de révision afin qu'au moins 70% des étudiants de L1 réussissent leurs examens. Sachant qu'il y a 300 étudiants inscrits en L1, combien de places faudra-t-il prévoir au minimum lors du stage pour espérer atteindre cet objectif ?

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE. Justifier la réponse avec précision. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. Pour tout réel b, la partie réelle de $\dfrac{1}{3+\mathrm{i}b}$ est $\dfrac{1}{3}$.
2. Pour tout nombre complexe z, le nombre $z+\overline{z}-z\overline{z}$ est réel.
3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2+2z+5=z$ est $\{-1-2\mathrm{i}, -1+2\mathrm{i}\}$.
4. L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\dfrac{z}{z+4}$ est imaginaire pur est un cercle de rayon 2 privé du point d'affixe -4.
5. Si (u_n) et (w_n) sont deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=+\infty$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<w_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n}{u_n}=+\infty$.

EXERCICE 3 (10 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$$

ainsi que la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a. Sur le graphique donné en annexe, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point A_n de coordonnées $(u_n\,;0)$.

Sur le graphique de l'annexe (page 3), placer le point A_0 puis construire, à l'aide $\mathscr{C}_f$ et de Δ, les points A_1, A_2 et A_3. On laissera apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. a. Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ et préciser le minimum de f sur cet intervalle.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

3. a. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant x$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c. Prouver que la suite (u_n) converge. (On ne demande pas, ici, la valeur de sa limite.)

4. On note ℓ la limite de (u_n).

a. Justifier que ℓ est solution de l'équation

$$(E) : x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

b. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}^*$ et en déduire la valeur de ℓ.

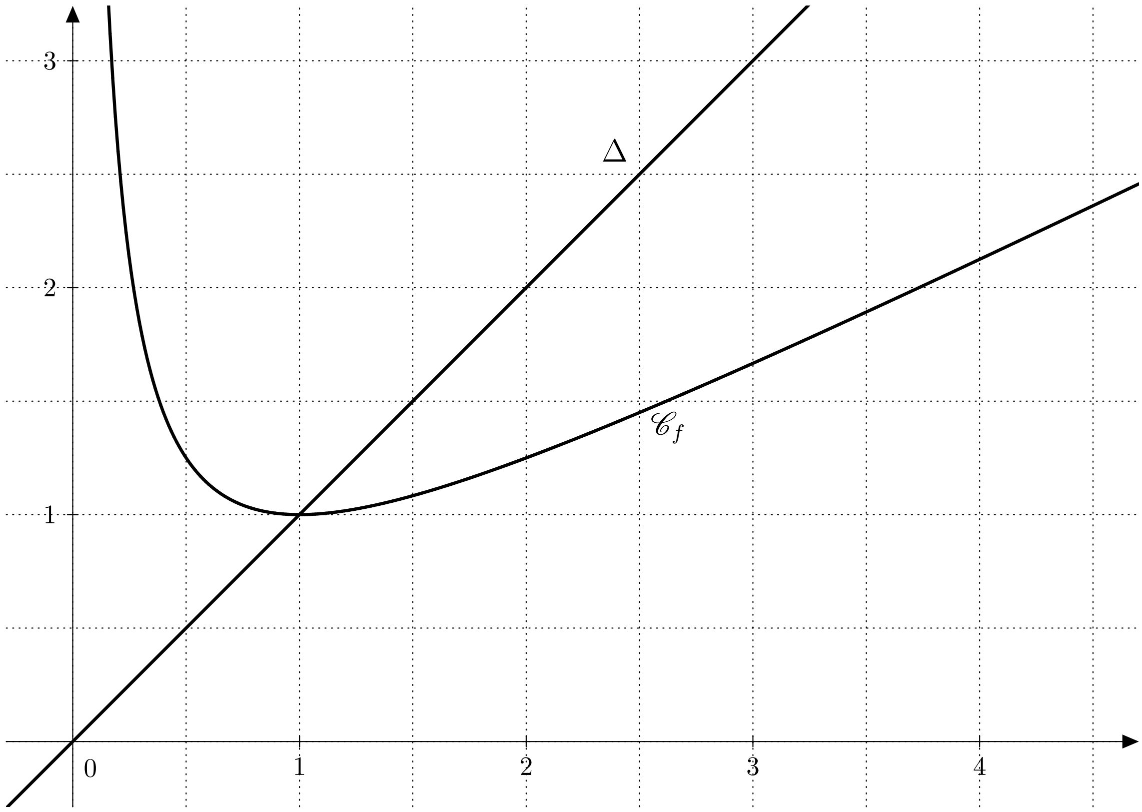
5. a. Sur l'annexe (page 3), compléter l'algorithme proposé afin qu'il affiche en sortie la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n - 1 \leqslant E$ pour une valeur E donnée en entrée.

b. On fait fonctionner cet algorithme en entrant $E = 10^{-6}$. Quelle valeur obtient-on en sortie ? (On justifiera sa réponse.)

NOM : . . . . Prénom : . . . . Classe : TS. . .

Annexe – À rendre avec sa copie

Exercice 3 – Question 1.b.



Exercice 3 – Question 4.a.

Entrée	:	E est un réel strictement positif
Initialisation	:	Donner à U la valeur 4
		Donner à N la valeur 0
Traitement	:	Tant que _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
		Donner à U la valeur _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
		Donner à N la valeur _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _