Correction de l'exercice de spécialité du baccalauréat blanc

1. **a.** Chercher un parcours en empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables revient à chercher une chaîne eulérienne dans le graphe.

Remarquons tout d'abord que ce graphe est connexe car la chaîne A–B–E–D–G–F–C passe par tous les sommets du graphe. On sait alors, par la théorème d'Euler, que le graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il a au plus 2 sommets de degré impair. Dressons le tableau des degrés des sommets :

sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	3	4	4	3	4	4	2

Ainsi, seule les sommets A et D sont de degrés impairs donc le graphe admet des chaînes eulériennes. Il est donc possible d'effectuer un parcours en empruntant une fois et une seule chaque piste cyclable.

b. Comme il y a des sommets de degré impair, le théorème d'Euler assure que la graphe n'admet pas de cycle eulérien. Il n'est donc pas possible de rentre le vélo dans la station de départ.

2. **a.** Comme le graphe n'est pas orienté, sa matrice d'adjacence M est symétrique. Par suite, M^3 est également symétrique. Or, la matrice T n'est pas symétrique par son coefficient d'indices 1 et 4 est 4 alors que son coefficient d'indices 4 et 1 est 5. Ainsi, $M^3 = N$.

b. L'abonné est passé exactement deux fois devant une station au cours de son trajet donc son trajet représente dans le graphe une chaîne de longueur 3 (station F – station intermédiaire 1 – station intermédiaire 2 – station E). Etant donné que le coefficient d'indices 6 et 5 de N est 11, il y a a pu suivre 11 trajets différents.

3. On utilise l'algorithme de Dijkstra qu'on présente sous forme d'un tableau.

A	B	C	D	E	F	G	Point traité
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	$\boxed{6(A)}$	10(A)	∞	∞	12(A)	∞	B
		10(A)	20(B)	19(B)	12(A)	∞	C
			20(B)	18(C)	12(A)	∞	F
			20(B)	18(C)		29(F)	E
			$\boxed{20(B)}$			29(F)	D
						$\boxed{24(D)}$	G

On en déduit que le seul trajet minimisant le temps de parcours est A–B–D–G et que le temps minimal pour aller de A à G est 24 minutes.