Correction du Baccalauréat blanc 2014

Exercice 1

1. **a.** La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geq 0$,

$$g'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x(2+x).$$

Or, pour tout $x \geq 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $2+x > 0$ donc $g'(x) \geq 0$. De plus, g ne s'annule que pour $x = 0$ donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x = +\infty$ et on en déduit ainsi que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

Sachant que $g(0) = 0^2\mathrm{e}^0 - 1 = -1$, on aboutit au tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
Variation de g	-1 $\nearrow$	$+\infty$

b. La fonction g est continue car dérivable et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. De plus, $0 \in \left[g(0)\,;\lim\limits_{+\infty} g\right[$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

De plus, $g(0{,}703) \approx -2.10^{-3} < 0$ et $g(0{,}704) \approx 2.10^{-3} > 0$ donc $\boxed{a \in\,]0{,}703\,;0{,}704[}$.

c. La fonction g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $g(a) = 0$ donc $g(x) < 0$ si $x \in [0\,;a[$, $g(a) = 0$ et $g(x) > 0$ si $x \in\,]a\,;+\infty[$.

2. **a.** <u>Etude en 0^+</u>

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ (par continuité de exp en 0) donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty}$.

<u>Etude en $+\infty$</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b. Pour tout réel strictement positif x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

c. Comme $x^2 > 0$ pour tout $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$. On déduit alors de la question 1.c. que $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in\,]0\,;a]$ et $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a\,;+\infty[$. Ainsi, <u>f est décroissante sur $]0\,;a]$ et croissante sur $[a\,;+\infty[$</u>. On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	0	a	$+\infty$
Variation de f	$\|$ $+\infty$ $\searrow$	$\mathrm{e}^a + \frac{1}{a}$ $\nearrow$	$+\infty$

d. D'après le tableau, $m = f(a) = \mathrm{e}^a + \frac{1}{a}$. Or, par définition, $g(a) = 0$ i.e. $a^2\mathrm{e}^a - 1 = 0$ donc $a^2\mathrm{e}^a = 1$ et ainsi $\mathrm{e}^a = \frac{1}{a^2}$. Il s'ensuit que $\boxed{m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}}$

e. On sait, d'après la question 1.b., que $0{,}703 < a < 0{,}704$ donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{0{,}704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0{,}703}$. De plus, par stricte croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $0{,}703^2 < a^2 < 0{,}704^2$ et donc, comme précédemment, $\frac{1}{0{,}704^2} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0{,}703^2}$. Par somme, on en déduit que $\frac{1}{0{,}704^2} + \frac{1}{0{,}704} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{0{,}703^2} + \frac{1}{0{,}703}$. Etant donné que $\frac{1}{0{,}704^2} + \frac{1}{0{,}704} \approx 3{,}438 > 3{,}43$ et $\frac{1}{0{,}703^2} + \frac{1}{0{,}703} \approx 3{,}446 < 3{,}45$, on conclut que $\boxed{3{,}43 < m < 3{,}45}$.

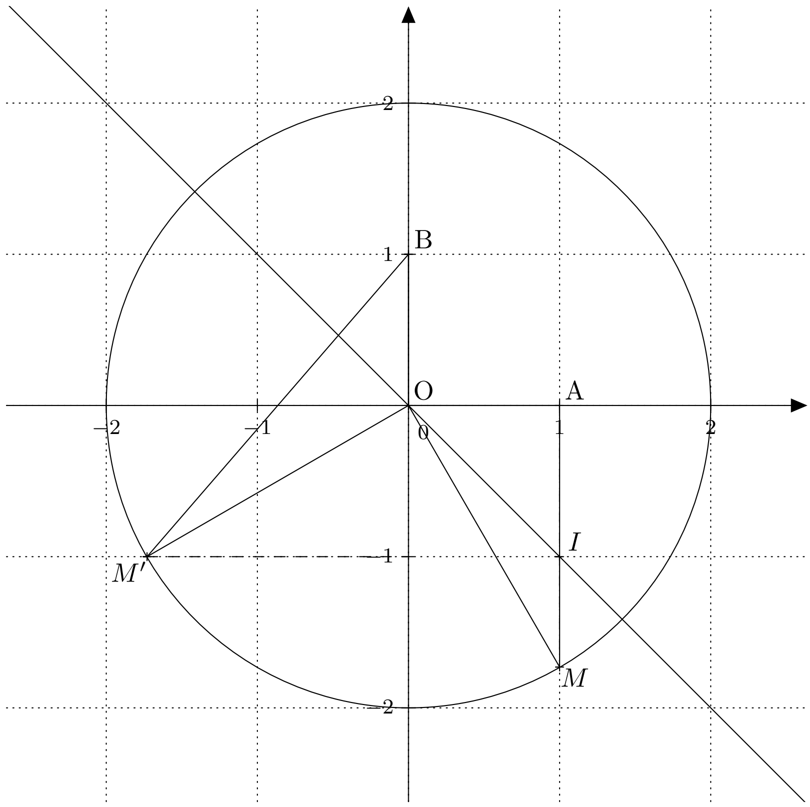
Exercice 2

1. **a.** Par définition, $z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et ainsi $\boxed{z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$.

b. Il s'ensuit que $z' = -\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = -\mathrm{i} + \mathrm{i}^2\sqrt{3}$ soit $\boxed{z = -\sqrt{3} - \mathrm{i}}$.

Dès lors, $|z'| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1}$ i.e. $\boxed{|z'| = 2}$. Par suite, $z' = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ donc $\boxed{\arg(z') = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]}$.

c.



Sur cet exemple, il semble que les propriétés 1 et 2 sont vérifiées.

2. **a.** L'affixe de I est $z_I = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_M}{2}$ i.e. $\boxed{z_I = \dfrac{1+z}{2}}$.

b. On en déduit que $\dfrac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z_I} = \dfrac{-\mathrm{i}z - \mathrm{i}}{\frac{1+z}{2}} = -\mathrm{i}(z+1) \times \frac{2}{1+z}$ soit, en simplifiant par $1+z$, $\boxed{\dfrac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z_I} = -2\mathrm{i}}$.

c. On déduit de la question précédente que $\left|\dfrac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z_I}\right| = |-2\mathrm{i}|$ i.e. $\dfrac{|z' - z_{\mathrm{B}}|}{|z_I|} = 2$ soit encore $\dfrac{\mathrm{B}M'}{\mathrm{O}I} = 2$.

Ainsi, on a bien $\boxed{\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I}$.

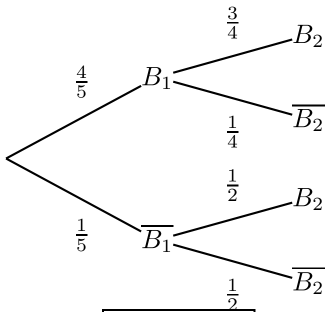
d. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{\mathrm{O}I}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'}) &= (\overrightarrow{\mathrm{O}I}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'})\ [2\pi] \\
&= -(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}I}) + (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'})\ [2\pi] \\
&= (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}I})\ [2\pi] \\
&= \arg(z' - z_{\mathrm{B}}) - \arg(z_I)\ [2\pi] \\
&= \arg\left(\frac{z' - z_{\mathrm{B}}}{z_I}\right)\ [2\pi] \\
&= \arg(-2\mathrm{i})\ [2\pi] \\
&= -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $(\overrightarrow{\mathrm{O}I}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'})$ est un angle droit et donc $(\mathrm{O}I)$ est perpendiculaire à $(\mathrm{B}M')$. Ainsi, $(\mathrm{O}I)$ est bien la hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$ issue de B.

Exercice 3 (enseignement obligatoire)

1. a.



b. D'après l'arbre, $p(B_2) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2}$ i.e. $\boxed{p(B_2) = \dfrac{7}{10}}$.

c. On cherche $p_{B_2}(B_1)$. Or, par définition,

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{p(B_1) \times p_{B_1}(B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{10}}$$

soit $\boxed{p_{B_2}(B_1) = \dfrac{6}{7}}$.

2. a. Si le joueur tire une boule blanche, son gain en euros, est $12 - 8 = 4$ et sinon, son gain, en euros, est $0 - 8 = -8$ donc les valeurs prises par X sont 4 et -8.

b. Par définition, $p(X = 4) = p(B_2) = \dfrac{7}{10}$ et $p(X = -8) = p(\overline{B_2}) = \dfrac{3}{10}$ donc la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	4	-8
$p(X = x_i)$	$\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

c. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \dfrac{7}{10} \times 4 + \dfrac{3}{10} \times (-8)$ soit $\boxed{E(X) = \dfrac{2}{5}}$.

d. Etant donné que $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons A_n l'événement « tirer au moins une boule blanche dans l'urne U_2 au cours des n épreuves ». Alors, $\overline{A_n}$ est l'événement « tirer une boule noire lors de chacune des n épreuves ». Par indépendance, la probabilité de $\overline{A_n}$ est $p(\overline{A_n}) = \left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ donc la probabilité de A_n est $p(A_n) = 1 - \left(\dfrac{3}{10}\right)^n$.
A l'aide la calculatrice, on affiche les valeurs de $p(A_n)$ pour les premières valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ et on trouve que le plus petit entier n tel que $p(A_n) \geq 0{,}99$ est $\boxed{n = 4}$.

Exercice 3 (enseignement de spécialité)

1. a. L'équation (E) admet la solution évidente $(1\,;1)$. Supposons que $(x\,;y)$ soit une solution de (E). Alors, $8x - 5y = 3 = 8 \times 1 - 5 \times 1$ donc $8(x-1) = 5(y-1)$. Ainsi, 5 divise $8(x-1)$ et, comme $8 \wedge 5 = 1$, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x - 1$. Ainsi, il existe un entier k tel que $x - 1 = 5k$ i.e. $x = 5k + 1$. Dès lors, $8 \times 5k = 5(y-1)$ i.e. $8k = y - 1$ donc $y = 8k + 1$. Dès lors, les solutions possibles de (E) sont de la forme $(5k+1\,;8k+1)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors, $8(5k+1) - 5(8k+1) = 40k + 8 - 40k - 5 = 3$ donc $(5k+1\,;8k+1)$ est solution de (E).
On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{Z}^2 \text{ est } \{(5k+1\,;8k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.

b. Par définition, $m = 8p + 1 = 5q + 4$ donc $8p - 5q = 4 - 1 = 3$ i.e. le couple $(p\,;q)$ est solution de l'équation (E). Dès lors, il existe un entier k tel que $p = 5k+1$ donc $m = 8p+1 = 8(5k+1)1 = 40k+9$ et ainsi $\boxed{m \equiv 9 \text{ (modulo 40)}}$.

c. D'après la question précédente, il existe un entier k tel que $m = 9 + 40k$. Alors,

$$m \geq 2\,000 \Leftrightarrow 9 + 40k \geq 2\,000 \Leftrightarrow 40k \geq 1\,991 \Leftrightarrow k \geq \frac{1\,991}{40}.$$

Or, $\dfrac{1\,991}{40} \approx 49{,}8$ donc, comme k est entier, $m \geq 2\,000$ équivaut à $k \geq 50$. Ainsi, le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à $2\,000$ est $m = 9 + 50 \times 40$ soit $\boxed{m = 2009}$.

2. **a.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, étant donné que $2^3 = 8 \equiv 1$(modulo 7), $2^{3k} \equiv 1^k$(modulo 7) i.e. $\boxed{2^{3k} \equiv 1 \text{ (modulo 7)}}$.

b. Effectuons la division euclidienne de 2 009 par 3 : $2\,009 = 3 \times 669 + 2$. Dès lors, $2^{2\,009} = 2^{3\times 669+2} = 2^{3\times 669} \times 2^2$. Or, d'après la question a, $2^{3\times 669} \equiv 1$ (modulo 7) donc $2^{2\,009} \equiv 1 \times 4$ (modulo 7) i.e. $2^{2\,009} \equiv 4$ (modulo 7). Comme $0 \leq 4 < 7$, on en déduit que le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}$ par 7 est 4.

3. **a.** Etant donné que $10^3 = 1\,000 = 7 \times 143 - 1$, on a bien $\boxed{10^3 \equiv -1 \text{ (modulo 7)}}$.

b. Il suit de la question précédente que $N = a \times 10^3 + b \equiv a \times (-1) + b$ (modulo 7) $\equiv b - a$ (modulo 7). Dès lors, 7 divise N si et seulement si $N \equiv 0$ (modulo 7) si et seulement si $b - a \equiv 0$ (modulo 7) donc $\boxed{7 \text{ divise } N \text{ si et seulement si } b \equiv a \text{ (modulo 7)}}$.

c. Etudions tous les cas possibles sachant que a et b sont des entiers compris entre 0 et 9 avec $a \neq 0$.
Si $a = 1$ alors $b = 1$ ou $b = 8$ donc $N = 1\,001$ ou $N = 1\,008$.
Si $a = 2$ alors $b = 2$ ou $b = 9$ donc $N = 2\,002$ ou $N = 2\,009$.
Si $a = 3$ alors $b = 3$ donc $N = 3\,003$.
Si $a = 4$ alors $b = 4$ donc $N = 4\,004$.
Si $a = 5$ alors $b = 5$ donc $N = 5\,005$.
Si $a = 6$ alors $b = 6$ donc $N = 6\,006$.
Si $a = 7$ alors $b = 0$ ou $b = 7$ donc $N = 7\,000$ ou $N = 7\,007$.
Si $a = 8$ alors $b = 1$ ou $b = 8$ donc $N = 8\,001$ ou $N = 8\,008$.
Si $a = 9$ alors $b = 2$ ou $b = 9$ donc $N = 9\,002$ ou $N = 9\,009$.
Ainsi, les 14 valeurs de N cherchées sont 1 001, 1 008, 2 002, 2 009, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 000, 7 007, 8 001, 8 008, 9 002 et 9 009.

Exercice 4

1. **L'affirmation 1 est vraie**. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc, en multipliant par $e^x > 0$, $-e^x \leq e^x \sin(x) \leq e^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \sin(x) = 0$.

2. **L'affirmation 2 est vraie**. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$. Par suite, par somme et quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ au voisinage de $+\infty$.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$. Par suite, par somme et quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (i.e. l'axe des abscisses) au voisinage de $-\infty$.

3. **L'affirmation 3 est fausse**. En effet, par théorème, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ ce qui donne $f'(x) = \dfrac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+3}} = \dfrac{2x-2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$.

4. **L'affirmation 4 est fausse**. En effet, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $h'(x) = 2\cos(2x) + 2x(-2\sin(2x)) = 2\cos(2x) - 4x\sin(2x)$. Ainsi, $h'(0) = 2$ donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 0 est 2 et non pas -2.

5. **L'affirmation 5 est vraie**. Posons $X = \cos x$. Alors, l'équation (E) : $2(\cos x)^2 + 7\cos x - 4 = 0$ s'écrit $2X^2 + 7X - 4 = 0$. Le discriminant du trinôme $2X^2 + 7X - 4$ est $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 81 > 0$ donc ce trinôme a 2 racines réelles qui sont $X_1 = \dfrac{-7-\sqrt{81}}{2\times 2} = -4$ et $X_2 = \dfrac{-7+\sqrt{81}}{2\times 2} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que (E) équivaut à $\cos x = -4$ ou $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Or, pour tout réel x, $\cos x \geq -1$ donc $\cos x = -4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Ainsi, (E) équivaut à $\cos x = \dfrac{1}{2}$ i.e. $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$ c'est-à-dire $x = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. Dans l'intervalle $]0\,;2\pi]$, on conclut donc que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{5\pi}{3}\right\}$.