Corrigé du baccalauréat blanc 2015

Exercice 1

1. Posons $z = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$. Alors,

$$|z| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dès lors,

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Ainsi, une forme exponentielle de z est $\boxed{z = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $|z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_n$. Ainsi, la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. Etant donné que $r_0 = |1| = 1$, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{O}A_n = |z_n| = r_n$. Or, $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc, par théorème, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$. Ainsi, <u>la longueur $\mathrm{O}A_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$</u>.

3. a. Voir l'annexe.

b. L'algorithme donne en sortie la plus petite valeur de l'entier n tel que $r_n \leq P$ où P est la valeur demandée à l'utilisateur en entrée.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

<u>Méthode 1</u> : Par définition, $\mathrm{O}A_n = |z_n| = r_n$ et $\mathrm{O}A_{n+1} = |z_{n+1}| = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$. De plus,

$$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - 1\right) z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| \times |z_n|.$$

Or, $\left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ et $|z_n| = r_n$ donc $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$.

Il s'ensuit que

$$(\mathrm{O}A_{n+1})^2 + (A_nA_{n+1})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 r_n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_n^2 = \frac{3}{4}r_n^2 + \frac{1}{4}r_n^2 = r_n^2 = (\mathrm{O}A_n)^2$$

donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, <u>le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}</u>.

Méthode 2 : en utilisant la relation de Chasles sur les angles orientés,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{A_{n+1}\mathrm{O}}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}) &= (\overrightarrow{A_{n+1}\mathrm{O}}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n})\ [2\pi] = -(\vec{u}, \overrightarrow{A_{n+1}\mathrm{O}}) + (\vec{u}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n})\ [2\pi]\\ &= -\arg(-z_{n+1}) + \arg(z_n - z_{n+1})\ [2\pi] = \arg\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{-z_{n+1}}\right)\ [2\pi]\\ &= \arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right)\ [2\pi].\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n - z_n}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n} = \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - 1\right) z_n}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}}{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}} = \frac{-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{3 + \sqrt{3}\mathrm{i}}$$

donc

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{(-1 + \sqrt{3}\mathrm{i})(3 - \sqrt{3}\mathrm{i})}{3^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{-3 + \sqrt{3}\mathrm{i} + 3\sqrt{3}\mathrm{i} + 3}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}.$$

Dès lors,

$$(\overrightarrow{A_{n+1}\mathrm{O}}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\right)\ [2\pi] = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

donc le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b. Soit la proposition P_n : « $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par définition, $z_0 = 1$ et $r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0\pi}{6}} = r_0 = 1$ donc P_0 est vraie.
Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $z_k = r_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{6}}$ donc, d'après la question 1,

$$z_{k+1} = \left(\frac{3}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times r_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{6}\right)} = r_{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(k+1)\pi}{6}}.$$

Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}}$.
On en déduit que

$$(\vec{u}\,; \overrightarrow{\mathrm{O}A_n}) = \arg(z_n)\ [2\pi] = \arg\left(r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}\right)\ [2\pi] = \frac{n\pi}{6}\ [2\pi].$$

c. Voir l'annexe.

Exercice 2

1. a. L'évènement C est l'évènement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ donc, comme A et B sont indépendants, $p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A})p(\mathrm{B})$ soit $\boxed{p(\mathrm{C}) = 0{,}0002}$.

b. L'événement D est l'évènement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ donc

$$p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}0002$$

soit $\boxed{p(\mathrm{D}) = 0{,}0298}$.

c. L'événement E est l'évènement $\overline{\mathrm{D}}$ donc $p(\mathrm{E}) = 1 - p(\mathrm{D})$ i.e. $\boxed{p(\mathrm{E}) = 0{,}9702}$.

d. On cherche $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$. Or, les évènements A et B sont indépendants donc $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$. Ainsi, la probabilité que le sac présente le défaut b sachant qu'il présente le défaut a est 0,01.

2. **a.** Choisir un sac au hasard est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}03$ en prenant comme succès S : « le sac est défectueux ».

Puisqu'on assimile les prélèvements à des tirages successifs avec remise, choisir 100 sacs au hasard revient à répéter 100 fois cette même épreuve de Bernoulli de façon indépendante : cela constitue un schéma de Bernoulli.

Ainsi, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès i.e. le nombre de sacs défectueux suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}03$.

b. L'évènement F est l'évènement $(X \geq 1)$. Son complémentaire est donc l'événement $(X = 0)$. Or, $p(X = 0) = 0{,}97^{100}$ donc $p(\mathrm{F}) = 1 - 0{,}97^{100}$ i.e. $p(\mathrm{F}) \approx 0{,}95$.

On peut interpréter ce résultat en disant que lorsqu'on choisit 100 sacs au hasard, la probabilité d'avoir au moins un sac défectueux est environ 0,95.

c. Par théorème, l'espérance de X est $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}03$ soit $\boxed{E(X) = 3}$.

Ceci signifie qu'en moyenne, lorsqu'on choisit 100 sacs au hasard, 3 d'entre eux sont défectueux.

Exercice 2 (spécialité)

1. Soit la proposition P_n : « $x_n = 2^{n+1} + 1$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Etant donné que $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3 = x_0$, la proposition P_0 est vraie.
Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $x_{k+1} = 2x_k - 1 = 2(2^{k+1} + 1) - 1 = 2^{k+2} + 2 - 1 = 2^{k+2} + 1$ donc P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1} + 1}$.

2. **a.** Grâce à la question 1, $x_8 = 2^9 + 1 = 513$ et $x_9 = 2^{10} + 1 = 1025$. Effectuons les divisions successives : $1025 = 1 \times 513 + 512$, $513 = 1 \times 512 + 1$ et $512 = 1 \times 512 + 0$ donc le dernier reste non nul est 1. On déduit donc de l'algorithme d'Euclide que $\boxed{\mathrm{PGCD}(x_8, x_9) = 1}$.

b. Par définition, $x_{2015} = 2x_{2014} - 1$ donc $2x_{2014} - x_{2015} = 1$. On déduit alors du théorème de Bézout que $\boxed{x_{2014} \text{ et } x_{2015} \text{ sont premiers entre eux}}$.

c. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 2x_n - 1$ donc $2x_n - x_{n+1} = 1$. On déduit alors du théorème de Bézout que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n \text{ et } x_{n+1} \text{ sont premiers entre eux}}$.

3. **a.** Soit la proposition H_n : « $2x_n - y_n = 5$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Etant donné que $2x_0 - y_0 = 2 \times 3 - 1 = 5$, la proposition H_0 est vraie.
Supposons que H_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, par définition, $2x_{k+1} - y_{k+1} = 2(2x_k - 1) - (2y_k + 3) = 2 \times 2x_k - 2y_k - 2 - 3 = 2(2x_k - y_k) - 5$. Or, comme H_k est vraie, $2x_k - y_k = 5$ donc $2x_{k+1} - y_{k+1} = 2 \times 5 - 5 = 5$. Ainsi, H_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2x_n - y_n = 5}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = 2x_n - 5 = 2(2^{n+1} + 1) - 5$ i.e. $\boxed{y_n = 2^{n+2} - 3}$.

c. Remarquons que $2^1 \equiv 2\ [5]$, $2^2 \equiv 4\ [5]$, $2^3 \equiv 3\ [5]$ et $2^4 \equiv 1\ [5]$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons r le reste dans la division euclidienne de p par 4. Ainsi, il existe un entier q tel que $p = 4q + r$. Il s'ensuit que

$$2^p = 2^{4q+r} = \left(2^4\right)^q \times 2^r \equiv 1^q \times 2^r\ [5] \equiv 2^r\ [5].$$

Notons R_p le reste dans la division euclidienne de 2^p par 5. Il suit de ce qui précède que si $p \equiv 0\ [4]$ alors $R_p = 1$, si $p \equiv 1\ [4]$ alors $R_p = 2$, si $p \equiv 2\ [4]$ alors $R_p = 4$ et si $p \equiv 3\ [4]$ alors $R_p = 3$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $2x_n - y_n = 5$. Or, d_n divise x_n et y_n donc d_n divise $2x_n - y_n$ i.e. d_n divise 5. Comme $d_n > 0$, on en déduit que $\boxed{d_n = 1 \text{ ou } d_n = 5}$.

e. On déduit de ce qui précède que $d_n = 1$ si et seulement si 5 ne divise pas ou moins l'un des deux nombres x_n ou y_n.

Or, $x_n = 2^{n+1} + 1 = 2 \times 2^n + 1$ donc, d'après la question c, on a le tableau de restes suivant

Reste de n modulo 4	0	1	2	3
Reste de 2^n modulo 5	1	2	4	3
Reste de x_n modulo 5	3	0	4	2

Ainsi, 5 divise x_n si et seulement si $n \equiv 1$ [4]. Or, dans ce cas,

$$y_n = 2^{n+2} - 3 = 4 \times 2^n - 3 \equiv 4 \times 2 - 3 \ [5] \equiv 0 \ [5]$$

donc 5 divise aussi y_n.

On conclut que x_n est y_n sont premiers entre eux si et seulement si $n \not\equiv 1$ [4]. L'ensemble cherché est donc $\boxed{\text{l'ensemble des entiers } n \text{ tels que } n-1 \text{ n'est pas divisible par } 4}$.

Exercice 3

1. Etant donné que $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $g(0) = 2\mathrm{e}^0 - 1 = 1$, on peut dire que le point A de coordonnées $(0\,;1)$ est commun aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par définition et, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, une équation de la tangente T_f à $\mathcal{C}_f$ en A est $y = \mathrm{e}^0(x-0) + \mathrm{e}^0$ i.e. $y = x + 1$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. Ainsi, une équation de la tangente T_g à $\mathcal{C}_g$ en A est $y = \mathrm{e}^0(x-0) + 2\mathrm{e}^0 - 1$ i.e. $y = x + 1$.

Ainsi, $T_f = T_g$ et la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une tangente commune à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point A.

2. a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x-2) = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty}$.

b. Soit x un réel non nul. Alors,

$$x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = x \times \frac{2}{x} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - x \times \frac{2}{x} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = h(x)$$

donc l'égalité voulue est bien démontrée.

Posons $X = \frac{x}{2}$. Alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$. De plus, par théorème, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

On en déduit, par composition, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 - \frac{2}{x}\right) = -1$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$. Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$.

c. Pour tout réel x,

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

Dès lors,

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \geq 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \geq \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Ainsi, $h'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ et $h'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;0]$.

d. On déduit des questions précédentes le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e. D'après le tableau de variation de h, pour tout réel x, $h(x) \geq 0$ i.e. $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geq 0$. Ceci peut encore s'écrire $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 - (x-1) \geq 0$ soit, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1}$.

f. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geq x + 1$ donc $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est située au-dessus de la droite } \Delta}$.

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1^2 = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1$.

b. Pour tout réel x,

$$f(x) - g(x) = \mathrm{e}^x - \left(2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1.$$

Ainsi, d'après la question précédente, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$ donc $f(x) - g(x) \geq 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est située au-dessus de la courbe } \mathcal{C}_g}$.

4. Notons a l'abscisse du point M. Alors, une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ en M est $y = \exp'(a)(x-a) + \exp(a)$ i.e. $y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$. On en déduit que l'abscisse de N est solution de l'équation $\mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a = 0$. Or, comme $\mathrm{e}^a \neq 0$,

$$\mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a(x-a) = -\mathrm{e}^a \Leftrightarrow x - a = -1 \Leftrightarrow x = a - 1.$$

Ainsi, les coordonnées de N sont $(a-1\,;0)$.
Par ailleurs, D est la droite d'équation $x = a$ donc les coordonnées de P sont $(a\,;0)$.
Comme N et P appartiennent à l'axe des abscisses, on en déduit que $NP = |x_P - x_N| = |a - (a+1)| = |-1|$ soit $\boxed{NP = 1}$.

Exercice 4

Réponses : 1. c) 2. c) 3. a) 4. a) 5. b)

Explications

1. Supposons que (IJ) et (MN) sont coplanaires. Alors, les points I, J, M et N sont également coplanaires. Notons $\mathcal{P}$ le plan contenant les points M, N, I et J. Comme N est le centre du carré BCGF et J est le milieu de [FG], la droite (JN) est parallèle à (FB). Considérons la parallèle à (FB) passant par M. Elle coupe [EF] en son milieu K. De plus, comme (FB) est parallèle à (JN) et à (MK), les droites (JN) et (MK) sont parallèles. Il s'ensuit que le point K appartient au plan $\mathcal{P}$. Ainsi, $\mathcal{P}$ contient les trois points I, J et K donc $\mathcal{P}$ est le plan (EFGH). C'est absurde puisque, par définition, M n'appartient pas à (EFGH). Ainsi, (IJ) et (MN) sont non coplanaires. La seule réponse possible est donc la réponse c) car dans tous les autres cas proposés, (IJ) et (MN) sont coplanaires.

2. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

3. Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$ donc $\dfrac{-1}{3x} \leq \dfrac{\sin(2x)}{x} \leq \dfrac{1}{3x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(2x)}{3x} = 0$.

4. Par théorème, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Or, pour tout réel x, $u'(x) = 4x - 5$ donc $f'(x) = \dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+4}}$

5. La fonction g est de la forme $g = \dfrac{1}{v}$ avec $v = u^3$. On en déduit que $v' = 3u'u^2$ et

$$g = \frac{-v'}{v^2} = \frac{-3u'u^2}{(u^3)^2} = \frac{-3u'u^2}{u^6} = \frac{-3u'}{u^4}.$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{-3(4x-5)}{(2x^2-5x+4)^4} = \frac{15-12x}{(2x^2-5x+4)^4}.$$

ANNEXE

Exercice 1

Question 3.a.

	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5			
R	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9\sqrt{3}}{32}$			
n	0	1	2	3	4	5			
$R > P$	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	VRAIE	FAUSSE			

Valeur affichée en sortie : 5

Question 4.c.