BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner une forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de r_n en fonction de n.

c. Que dire de la longueur $\mathrm{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n entier naturel
	R réel
	P réel strictement positif
Entrée :	Demander la valeur de P
Traitement :	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher n

a. Compléter le tableau de l'annexe (page 5) en faisant fonctionner l'algorithme pour $P = 0{,}5$.

b. Quel est le rôle de cet algorithme concernant la suite (r_n) ?

4. **a.** Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ et en déduire une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}\,; \overrightarrow{\mathrm{O}A_n})$.

c. Compléter la figure donnée en annexe (page 5), à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

Exercice 2 **5 points**

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée. On note A l'évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}01$. On suppose que **ces deux évènements sont <u>indépendants</u>**.

a. Calculer la probabilité de l'évènement C : « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement D : « le sac est défectueux ».

c. Calculer la probabilité de l'évènement E : « le sac ne présente aucun défaut ».

d. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03. On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité de l'évènement F : « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Exercice 3 — 5 points

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal. Ces deux courbes sont représentées sur l'annexe (page 5).

1. Démontrer que le point A de coordonnées $(0\,;1)$ est commun aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ puis démontrer qu'en ce point, les deux courbes ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel non nul x, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

e. En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4. Une propriété de la courbe $\mathcal{C}_f$

Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}_f$. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en M et D la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M. On appelle respectivement N et P les points d'intersection de l'axe des abscisses avec les droites T et D.

Démontrer que $NP = 1$.

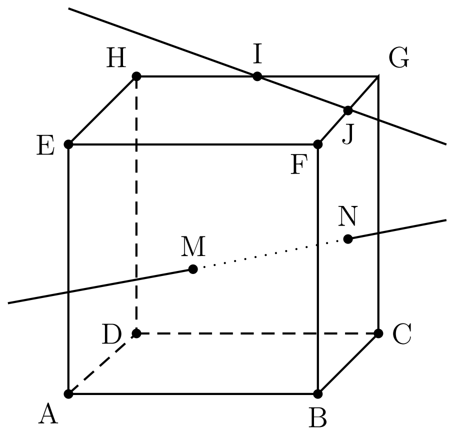
Exercice 4 **5 points**

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.

1. La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.



Les droites (IJ) et (MN) sont :

a) perpendiculaires b) sécantes et non perpendiculaires c) orthogonales d) parallèles

2. On note D l'ensemble des réels qui ne sont pas de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On considère la fonction f définie sur D par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Alors, f est dérivable sur D et, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est égal à :

a) $\dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$ b) $\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ c) $-\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ d) $\dfrac{-\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)}{3x}$ est égale à :

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) $\dfrac{2}{3}$

Dans les questions 4 et 5, on note u la fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = 2x^2 - 5x + 4.$$

4. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

a) $\dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+4}}$ b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(4x-5)$ c) $\sqrt{4x-5}$ d) $\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2-5x+4}}$

5. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(u(x))^3}$. Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :

a) $\dfrac{3(4x-5)}{(2x^2-5x+4)^2}$ b) $\dfrac{15-12x}{(2x^2-5x+4)^4}$ c) $\dfrac{1}{3(2x^2-5x+4)^2}$ d) $\dfrac{-(4x-5)}{(2x^2-5x+4)^6}$

NOM : .... **Prénom :** ....

ANNEXE
A rendre avec sa copie

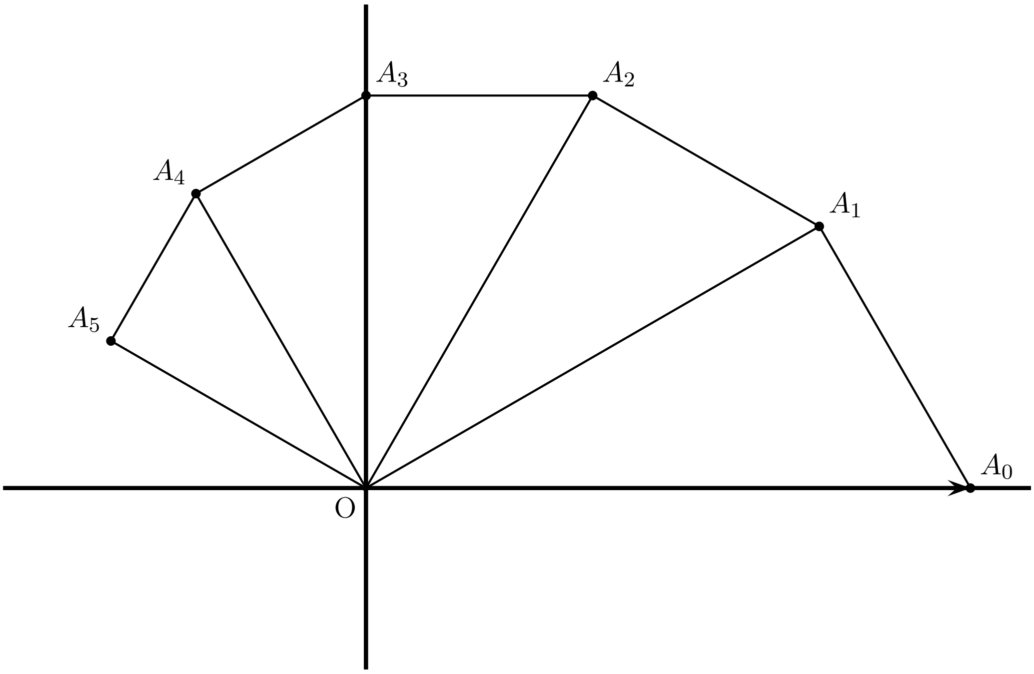
Exercice 1

Question 3.a. (Remarque : toutes les colonnes du tableau suivant ne sont pas forcément nécessaires.)

	Initialisation	Etape 1	Etape 2						
R	1								
n	0								
$R > P$	VRAIE								

Valeur affichée en sortie : ....

Question 4.c.



Exercice 3