BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 9

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 **5 points**

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par des piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est 0,98 ;

— la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

— M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya » ;

— T l'évènement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On note p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

Partie A. — On suppose dans toute cette partie que $p = 0{,}1$.

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.

2. Calculer $\mathrm{P}(M \cap T)$.

3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,107.

4. L'individu choisi a un test positif. Quelle est la probabilité qu'il soit atteint par la maladie ? (on donnera une valeur arrondie à 0,001 près).

Partie B. — Dans toute cette partie, p est à nouveau un réel quelconque appartenant à $[0\,;1]$.

On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure ou égale à 0,95.

1. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(p) = \dfrac{98p}{97p+1}$.

2. À partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ? (On donnera une valeur arrondie à 0,01 près.)

Partie C. — En juillet 2015, l'institut de veille sanitaire d'une île annonce que 15% de la population est atteinte par le virus. On effectue des tests sur un échantillon de 100 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer que le choix d'un tel échantillon peut être assimilé à un tirage avec remise de 100 personnes dans la population.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus.

1. Déterminer en justifiant la loi suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.

2. Quelle est la probabilité que sur cet échantillon exactement 10 personnes soient atteintes par le virus ? (On donnera une valeur arrondie à 0,01 près.)

3. Quelle est la probabilité qu'au plus 15 personnes soient atteintes par le virus ? (On donnera une valeur arrondie à 0,01 près.)

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 1$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier non nul.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 puis déterminer le P.G.C.D. de u_2 et u_3.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4u_n = 5^n - 1$.

4. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $5^{n+1} - 1$ et $5^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B. — On propose deux généralisations du résultat de la question 4 de la partie A.
Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer deux entiers u et v tels que $(a^{n+1} - 1)u + (a^n - 1)v = a - 1$.

b. En raisonnant modulo $a - 1$, démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a - 1$ divise $a^k - 1$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $a^{n+1} - 1$ et $a^n - 1$.

2. Soit m et n deux entiers naturels premiers entre eux. On pose $d = \mathrm{PGCD}(a^m - 1, a^n - 1)$.

a. Justifier que $a^m \equiv 1\ [d]$ et $a^n \equiv 1\ [d]$.

b. Montrer qu'il existe deux entiers naturels s et t tels qu'on ait l'une des deux égalités $ms = 1 + nt$ ou $nt = 1 + ms$.

c. Déduire des questions précédentes que $a \equiv 1\ [d]$ puis déterminer la valeur de d.

EXERCICE 3 **5 points**

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes respectives de f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ et donner une interprétation graphique de cette seconde limite.

2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

3. a. Démontrer que, pour tout réel x, $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2$.

b. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) - g(x) \geq 1$ puis donner une interprétation graphique de cette inégalité.

Partie B. — On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2(x - 1)\mathrm{e}^x + 1$.

1. a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer la dérivée de la fonction φ puis étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2. a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty\,; 0]$.
On admet qu'on montre de même que $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [0\,; +\infty[$.

b. Déterminer une valeur arrondie au centième de α.

c. On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$.
Démontrer que la droite (EF) est une tangente commune aux deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 4 **5 points**

Partie A. — Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1} = \mathrm{e}^{x} \times \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}-3=0$ est $\{-3\,;0\}$.
3. Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)\mathrm{e}^{x}}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.
   La courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptotes les droites d'équations $x=1$ et $y=0$.

Partie B. — Cette partie est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Donner une réponse inexacte, ne pas répondre à une question ou donner plusieurs réponses à une même question ne rapporte et n'enlève pas de point.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,
   a) $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2}$ b) $g'(x)=-\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$ c) $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$ d) $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\times\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}}$
5. On considère la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{-2\mathrm{e}^{x}}{x+1}$. On note $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$. Une équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point d'abscisse 1 est
   a) $y=-1{,}36(x+1)$ b) $y=-\dfrac{1}{2}e(x+1)$ c) $y=-\dfrac{1}{2}e(x-1)$ d) $y=-2ex+e$.
6. La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH de côté 1 mètre. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AE] et [BC].
   a) (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   b) (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   c) (IJ) et (EC) sont sécantes.
   d) Le volume, en litre, du tétraèdre AHFC est $\dfrac{1}{3}$.