Correction du devoir commun de mathématiques du 14/02/14
SUJET A

Exercice 1

Partie A

1. **a.** Graphiquement, l'image de 0 est $\boxed{f(0) = 3}$ et l'image de 2 est $\boxed{f(2) = 3}$.

   b. Graphiquement, les antécédents de 0 par f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses : ce sont donc $\boxed{-1 \text{ et } 3}$.
   Graphiquement, les antécédents de -2 par f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = -2$: ce sont donc environ $\boxed{-1{,}4 \text{ et } 3{,}4}$.

2. **a.** Le tableau de variation de f sur $[-3\,;5]$ est

x	-3		1		5
Variation de f	-12	$\nearrow$	4	$\searrow$	-12

   b. Le maximum de la fonction f sur $[-3\,;5]$ est 4 et il est atteint en $x = 1$.

3. **a.** Graphiquement, les solutions de $f(x) = -5$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = -5$. On en déduit que, graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) = -5$ est $\{-2;\ 4\}$.

   b. Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq 3$ sont les abscisses des points en lesquels la courbe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = 3$. On en déduit que, graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 3$ est $[0\,;2]$.

   c. Sur l'intervalle $[-2\,;1]$, f est croissante donc, si $x \in [-2\,;1]$ alors $f(-2) \leq f(x) \leq f(1)$ c'est-à-dire $-5 \leq f(x) \leq 4$.
   Sur l'intervalle $[1\,;3]$, f est décroissante donc, si $x \in [1\,;3]$ alors $f(1) \geq f(x) \geq f(3)$ c'est-à-dire $4 \geq f(x) \geq 0$. On en déduit que le meilleur encadrement possible est $\boxed{-5 \leq f(x) \leq 4}$.

4. **a.** La fonction g est une fonction affine restreinte à l'intervalle $[-3\,;5]$ donc sa courbe est un segment de droite. Il suffit de deux points pour la tracer. Comme $g(-3) = -5$ et $g(1) = 3$, la courbe de g passe par les points de coordonnées $(-3\,;-5)$ et $(1\,;3)$.
   Voir l'annexe pour la construction.

   b. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec celle de g. Ainsi, graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $\{-1{,}4;\ 1,4\}$.

   c. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points en lesquels la courbe de f est strictement en dessous de celle de g. Ainsi, graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $[-3\,;-1{,}4[\cup]1,4\,;5]$.

Partie B

1. **a.** $f(x) = 4 - (x^2 - 2x + 1) = 4 - x^2 + 2x - 1$ donc $\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$.

   b. $f(x) = 2^2 - (x-1)^2 = [2 + (x-1)][2 - (x-1)] = (2 + x - 1)(2 - x + 1)$ donc $\boxed{f(x) = (x+1)(-x+3)}$.

2. $f(2) = 4 - (2-1)^2 = 4 - 1 = 3$ et $f(-\sqrt{3}) = -(-\sqrt{3})^2 + 2(-\sqrt{3}) + 3 = -3 - 2\sqrt{3} + 3 = -2\sqrt{3}$.

3. Chercher les antécédents de 0 par f revient à résoudre $f(x) = 0$. Pour cela, on utilise la forme factorisée :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(-x+3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } 3 = x.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est $\{-1;\ 3\}$.

4. On utilise la forme développée :

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = 3 \Leftrightarrow -x^2+2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2 = x.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $f(x) = 3$ est $\{0;\ 2\}$.

5. On utilise la forme développée de $f(x)$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 - (2x + 1) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 - x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - x = 0 \text{ ou } \sqrt{2} + x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} = x \text{ ou } x = -\sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $\{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$.

Exercice 2

Partie A

1. **a.** Voir l'annexe.

b. Les coordonnées de K sont $x_\text{K} = \dfrac{x_\text{A} + x_\text{B}}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1$ et $y_\text{K} = \dfrac{y_\text{A} + y_\text{B}}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ c'est-à-dire $\boxed{\text{K}(1\,;2)}$.

c. Les coordonnées du milieu de [CD] sont $\dfrac{x_\text{C} + x_\text{D}}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 = x_\text{K}$ et $\dfrac{y_\text{C} + y_\text{D}}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2 = y_\text{K}$ donc K est aussi le milieu de [CD].

d. Les diagonales du quadrilatère ADBC se coupent en leur milieu donc $\boxed{\text{ADBC est un parallélogramme}}$.

2. **a.** Par définition, C est le milieu de [EA] donc $x_\text{C} = \dfrac{x_\text{E} + x_\text{A}}{2} = \dfrac{x_\text{E} + 0}{2} = \dfrac{x_\text{E}}{2}$ donc $x_\text{E} = 2x_\text{C} = 2 \times (-1) = -2$ et $y_\text{C} = \dfrac{y_\text{E} + y_\text{A}}{2} = \dfrac{y_\text{E} - 1}{2}$ donc $y_\text{E} - 1 = 2y_\text{C} = 2 \times 1 = 2$ et ainsi $y_\text{E} = 3$. Finalement, $\boxed{\text{E}(-2\,;3)}$.

b. Par théorème, $\text{AE} = \sqrt{(x_\text{E} - x_\text{A})^2 + (y_\text{E} - y_\text{A})^2} = \sqrt{(-2-0)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{4+16}$ soit $\boxed{\text{AE} = \sqrt{20}}$.

3. **a.** D'une part, $\text{AB}^2 = 2\sqrt{10}^2 = 40$ et, d'autre part, $\text{AE}^2 + \text{EB}^2 = \sqrt{20}^2 + (2\sqrt{5})^2 = 20 + 20 = 40$ donc $\text{AB}^2 = \text{AE}^2 + \text{EB}^2$. Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEB est rectangle en E.

b. Par théorème, on en déduit que le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABE est le milieu de l'hypoténuse [AB] c'est-à-dire le point K.

c. Voir l'annexe.

Partie B

1. Voir l'annexe.

2. $\overrightarrow{\text{AB}}\,(x_\text{B} - x_\text{A}\,; y_\text{B} - y_\text{A})$ soit $\overrightarrow{\text{AB}}\,(-5-(-1)\,; 4-6)$ et donc $\boxed{\overrightarrow{\text{AB}}\,(-4\,;-2)}$.

3. Le point D est tel que ABCD soit un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{\text{DC}} = \overrightarrow{\text{AB}}$. Or, $\overrightarrow{\text{DC}}\,(x_\text{C} - x_\text{D}\,; y_\text{C} - y_\text{D})$ soit $\overrightarrow{\text{DC}}\,(3 - x_\text{D}\,; 4 - y_\text{D})$ donc ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\begin{cases} 3 - x_\text{D} = -4 \\ 4 - y_\text{D} = -2 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_\text{D} = 7 \\ y_\text{D} = 6 \end{cases}$. Ainsi, $\boxed{\text{D}(7\,;6)}$.

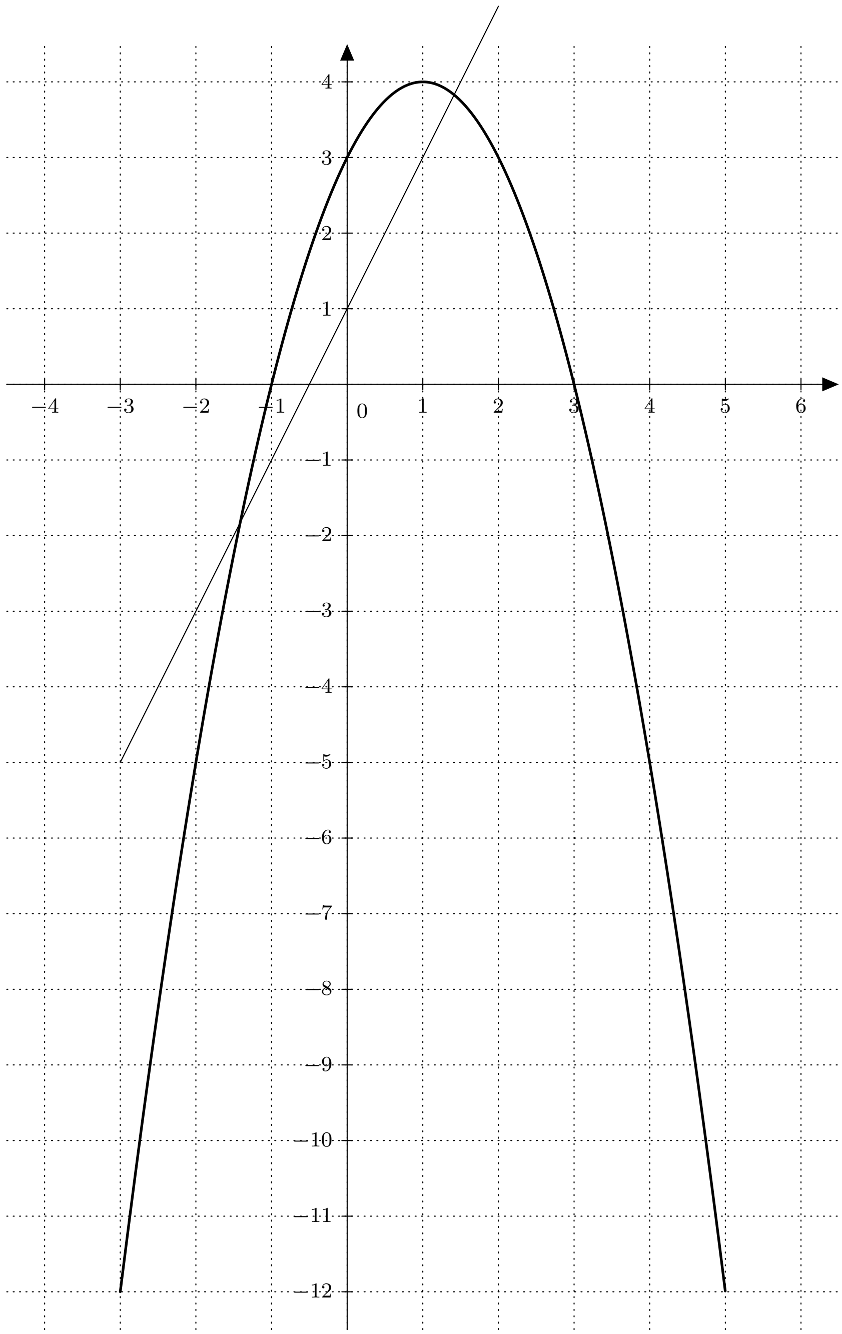
4. Voir l'annexe.

5. Par définition, $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{BE}}$ donc le quadrilatère ABEC est un parallélogramme.

6. Puisque ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{\text{BA}} = \overrightarrow{\text{CD}}$ et, puisque ABEC est un parallélogramme, $\overrightarrow{\text{BA}} = \overrightarrow{\text{EC}}$. Il s'ensuit que $\boxed{\overrightarrow{\text{EC}} = \overrightarrow{\text{CD}}}$ et donc que C est le milieu du segment [DE].

ANNEXE

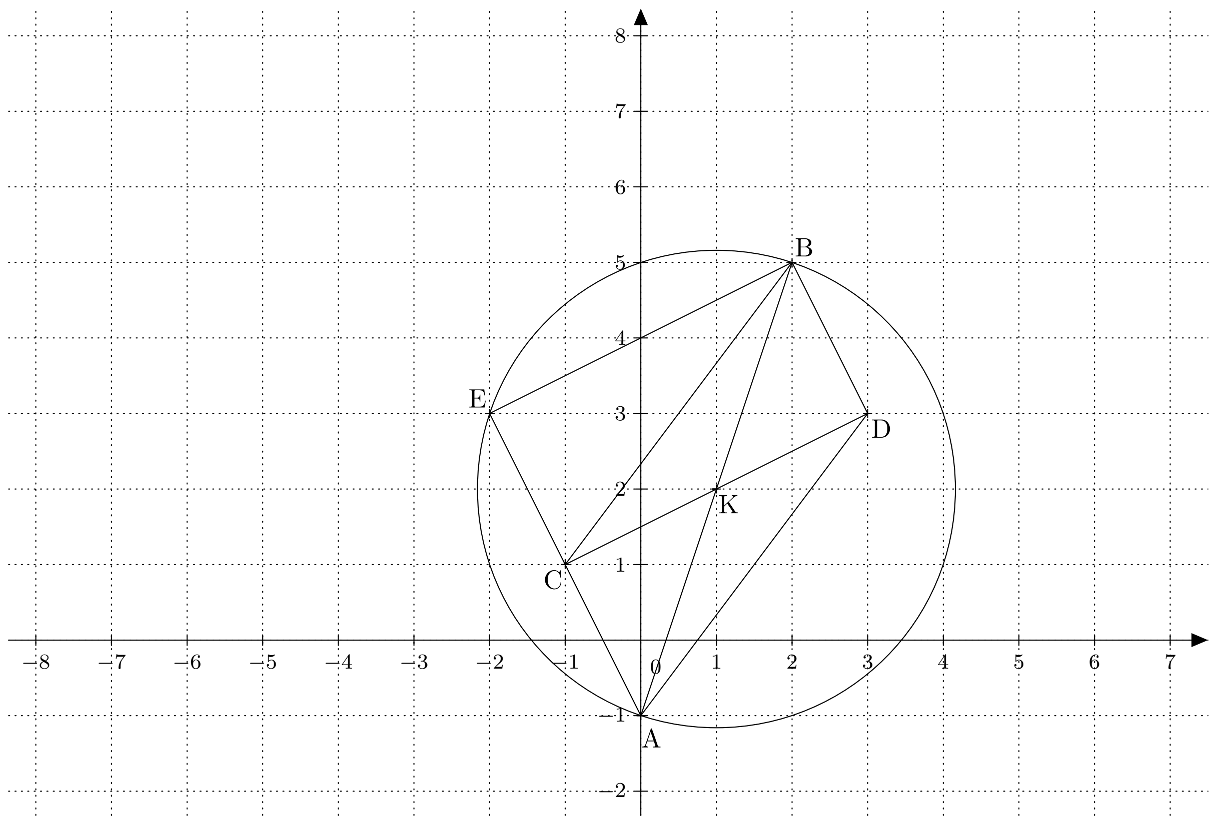
Exercice 1



Exercice 3

Partie A	Question 1	a	b	c
	Question 2	a	b	c
	Question 3	a	b	c
Partie B	Question 4	a	b	c
	Question 5	a	b	c
	Question 6	a	b	c
Partie C	Question 7	a	b	c
	Question 8	a	b	c
	Question 9	a	b	c
Partie D	Question 10	a	b	c

Exercice 2 – Partie A



Exercice 2 – Partie B